۱-۶

چنانچه موشکی با سرعت اولیه‌ی V و با زاویه‌ی θ به هوا پرتاب شود، به روش فهرست‌نویسی رابطه‌ی میزان مسافت طی‌شده در صفحه‌ی افقی، R، را برحسب متغیرهای V، θ و g به‌دست آورید.

پاسخ:

میزان مسافت طی‌شده در صفحه‌ی افقی، R، به‌عنوان متغیر تابع و سرعت اولیه‌ی، V، زاویه‌ی پرتاب، θ، و شتاب ثقل، g، به‌عنوان متغیرهای مستقل درنظر گرفته می‌شوند. بنابراین، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$R = f(V,\theta,g)$$

با استفاده از روش فهرست‌نویسی [بخش (۶-۲-۱)]، متغیر تابع به‌صورت حاصل‌ضرب توانی متغیرهای مستقل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$R = f\left[(V)^a(\theta)^b(g)^c\right] \qquad (1)$$

با استفاده از جدول (۱-۱) فصل اول، ابعاد متغیرهای مختلف در رابطه‌ی بالا به‌صورت زیر است:

$$R \doteq L \quad ; \quad V \doteq LT^{-1} \quad ; \quad \theta \doteq F^0L^0T^0 \quad ; \quad g \doteq LT^{-2}$$

چون متغیر θ بی‌بعد است، خود جزو یکی از اعداد بی‌بعد است. لذا، این متغیر از رابطه‌ی (۱) حذف می‌شود تا در مرحله‌ی نهایی به آن افزوده شود. با جایگزینی ابعاد این متغیرها، رابطه‌ی (۱) با استفاده از اصل همگنی ابعاد به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(L) \doteq \left(LT^{-1}\right)^a\left(LT^{-2}\right)^c \quad ; \quad \begin{cases} L:\ 1 = a + c \\ T:\ 0 = -a - 2c \end{cases} \quad ; \quad c = -1\ ,\ a = 2 \quad ; \quad R = f\left[(V)^2\,\theta\,(g)^{-1}\right] = \underline{\underline{f\left(\frac{V^2\theta}{g}\right)}}$$

۷-۶

اگر توان لازم برای به‌حرکت درآوردن پروانه‌ی کشتی، P، تابعی از قطر پروانه، D، سرعت جریان، V، سرعت صوت در سیال، c، سرعت زاویه‌ای پروانه، ω، چگالی سیال، ρ، لزجت دینامیکی سیال، μ، باشد، متغیرهای بی‌بعد را به روش فهرست‌نویسی استخراج کنید.

پاسخ:

$$P = f(D,V,c,\omega,\rho,\mu) \quad ; \quad P = f\left(D^aV^bc^c\omega^d\rho^e\mu^f\right) \qquad (1)$$

با استفاده از جدول (۱-۱) فصل اول، ابعاد ترم‌های مختلف در رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر است:

$$P \doteq FLT^{-1} \quad ; \quad D \doteq L \quad ; \quad V \doteq c \doteq LT^{-1} \quad ; \quad \omega \doteq T^{-1} \quad ; \quad \rho \doteq FL^{-4}T^2 \quad ; \quad \mu \doteq FL^{-2}T$$

$$FLT^{-1} \doteq (L)^a\left(LT^{-1}\right)^b\left(LT^{-1}\right)^c\left(T^{-1}\right)^d\left(FL^{-4}T^2\right)^e\left(FL^{-2}T\right)^f$$

$$\begin{cases} F:\ 1 = e + f \\ L:\ 1 = a + b + c - 4e - 2f \\ T:\ -1 = -b - c - d + 2e + f \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a = 2 + d - f \\ b = 3 - d - c - f \\ e = 1 - f \end{cases} \quad ; \quad P = f\left[D^{(2+d-f)}V^{(3-d-c-f)}c^c\omega^d\rho^{(1-f)}\mu^f\right]$$

$$P = \rho V^3D^2\left\{f\left[\left(\frac{\rho Vd}{\mu}\right)^{-f}\left(\frac{D\omega}{V}\right)^d\left(\frac{V}{c}\right)^{-c}\right]\right\} \quad ; \quad \underline{\underline{\frac{P}{\rho V^3D^2} = f\left(\frac{\rho Vd}{\mu},\frac{D\omega}{V},\frac{V}{c}\right)}}$$

$$Q \doteq L^3T^{-1} \qquad d \doteq L \qquad \Delta P \doteq FL^{-2} \qquad \rho \doteq FL^{-4}T^2$$

۱۴-۶

$$Q = \frac{K}{d}\frac{\Delta P}{\rho} \qquad \left(L^3T^{-1}\right) \doteq \frac{1}{(L)}\frac{(FL^{-2})}{(FL^{-4}T^2)} \ ,\ L^3T^{-1} \doteq \frac{1}{L}(L^2)(T^{-2}) \neq LT^{-2}$$

$$Q = Kd^2\frac{\Delta P}{\rho} \qquad \left(L^3T^{-1}\right) \doteq (L)^2\frac{(FL^{-2})}{(FL^{-4}T^2)} \ ,\ L^3T^{-1} \doteq (L^2)(L^2T^{-2}) \neq L^4T^{-2}$$

$$Q=\frac{k}{d}\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \qquad (L^3T^{-1}) \doteq \frac{1}{L}\left[\frac{(FL^{-2})}{(FL^{-4}T^2)}\right]^{1/2} \quad , \quad L^3T^{-1} \doteq \frac{1}{L}\left[(L)(T^{-1})\right] \neq T^{-1}$$

$$Q=kd^2\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \qquad (L^3T^{-1}) \doteq (L)^2\left[\frac{(FL^{-2})}{(FL^{-4}T^2)}\right]^{1/2}$$

$$L^3T^{-1} \doteq (L^2)\left[(L)(T^{-1})\right] = L^3T^{-1}$$

۲۲-۶

از یک آنالیز ابعادی صحیح رابطه‌ی بی‌بعد زیر به دست آمده است. کدام یک از روابط زیر می‌تواند نادرست باشد؟

$$f\left(\frac{V}{\omega D},\frac{\rho\omega D^2}{\mu},\frac{C}{\omega D}\right)=0$$

۱) $f\left(\frac{C}{V},\frac{\rho CD}{\mu},\frac{C}{\omega D}\right)=0$

۲) $f\left(\frac{V}{\omega D},\frac{\rho CD^2}{\mu},\frac{C}{\omega D}\right)=0$

۳) $f\left(\frac{V}{\omega D},\frac{\rho CD}{\mu},\frac{\rho VC}{\omega\mu}\right)=0$

۴) $f\left(\frac{V\mu}{\omega^2D^3\rho},\frac{\rho VD}{\mu},\frac{C}{\omega D}\right)=0$

پاسخ:

گزینه‌ی (۲). در گزینه‌ی (۱) متغیر اول از تقسیم متغیر سوم بر متغیر اول رابطه‌ی داده شده به‌دست آمده و لذا بی‌بعد است. متغیر دوم از ضرب متغیر دوم در متغیر سوم رابطه‌ی داده شده به‌دست آمده و لذا بی‌بعد است. متغیر سوم نیز مانند متغیر سوم رابطه‌ی داده شده است و لذا بی‌بعد است. به روشی مشابه اگر به بررسی دیگر متغیرها بپردازیم، تنها در گزینه‌ی (۲) است که متغیر $\rho cD^2/\mu$ بعددار است.

۳۰-۶

چنانچه افت فشار در واحد طول لوله، Δp_ℓ، برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر در یک لوله‌ی افقی صاف و طویل، تابعی از قطر لوله، D، چگالی سیال، ρ، لزجت دینامیکی سیال، μ، و سرعت سیال، V، باشد، با استفاده از روش گام‌به‌گام رابطه‌ی Δp_ℓ برحسب دیگر متغیرها را استخراج کنید.

پاسخ:

از صورت مسأله و جدول (۱-۱) فصل اول، رابطه‌ی بین متغیرها و مراحل حذف ابعاد اصلی به‌صورت زیر درمی‌آید [بخش (۶-۲-۳)]:

$$\underbrace{\Delta p_\ell}_{FL^{-3}}=f\left(\underbrace{D}_{L},\underbrace{\rho}_{FL^{-4}T^2},\underbrace{\mu}_{FL^{-4}T^2},\underbrace{V}_{LT^{-1}}\right) \quad ; \quad F:\ \underbrace{\frac{\Delta p_\ell}{\rho}}_{LT^{-2}}=f_1\left(\underbrace{D}_{L},\frac{\rho}{\rho},\underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{L^2T^{-1}},\underbrace{V}_{LT^{-1}}\right)=f_1\left(\underbrace{D}_{L},\underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{L^2T^{-1}},\underbrace{V}_{LT^{-1}}\right)$$

$$T:\ \underbrace{\frac{\Delta p_\ell}{\rho V^2}}_{L^{-1}}=f_2\left(\underbrace{D}_{L},\underbrace{\frac{\mu}{\rho V}}_{L},\frac{V}{V}\right)=f_2\left(\underbrace{D}_{L},\underbrace{\frac{\mu}{\rho V}}_{L}\right) \quad ; \quad L:\ \frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2}=f_3\left(\frac{D}{D},\frac{\mu}{\rho VD}\right)=f_3\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)$$

۳۷-۶

۱) عدد فرود ⇐ $Fr \propto \frac{F_I}{F_G}$ ۲) عدد وبر ⇐ $We \propto \frac{F_I}{F}$

جواب بدست سایر گزینه‌ها

۳) عدد ماخ ⇐ $Ma \propto \frac{F_I}{F_E}$ ۴) عدد رینولدز ⇐ $Re \propto \frac{F_I}{F_V}$

گزینه ۴ صحیح است

۴۲-۶

دبی جریان در کانال باز، Q، توسط سرریز لبه‌تیز V-شکل اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید که $V = f(H, g, \theta)$ باشد که در آن H ارتفاع آب از بالای تاج سرریز، g شتاب ثقل و θ زاویه‌ی سرریز است. نتیجه‌ی یک پژوهش نشان می‌دهد که Q با $tg(\theta/2)$ تناسب مستقیم دارد. در یک آزمایش با $\theta = ۹۰^\circ$ و $H = ۰/۳\ m$، مقدار دبی $Q = ۰/۰۶۸\ m^3/s$ به‌دست آمده است. متغیرهای بی‌بعد را به‌دست آورید و با استفاده از این داده‌ی محدود، رابطه‌ی صریح برای دبی به‌دست آورید.

پاسخ:

متغیر θ خود یکی از متغیرهای بی‌بعد مسأله است. برای یافتن دیگر متغیر بی‌بعد، از صورت مسأله و جدول (۱-۱) فصل اول، رابطه‌ی بین متغیرها و مراحل حذف ابعاد اصلی به‌صورت زیر درمی‌آید [بخش (۶-۲-۳)]:

$$Q = f(H, g, \theta) \quad ; \quad Q \doteq L^3T^{-1} \quad ; \quad H \doteq L \quad ; \quad g \doteq LT^{-2} \quad ; \quad \theta \doteq F^0L^0T^0$$

$$\begin{cases} H \doteq L \\ g \doteq LT^{-2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} L = H \\ T = \sqrt{Lg^{-1}} = \sqrt{Hg^{-1}} \end{cases} \quad ; \quad Q \doteq L^3T^{-1} = H\left(\sqrt{Hg^{-1}}\right)^{-1} = H^{5/2}g^{1/2}$$

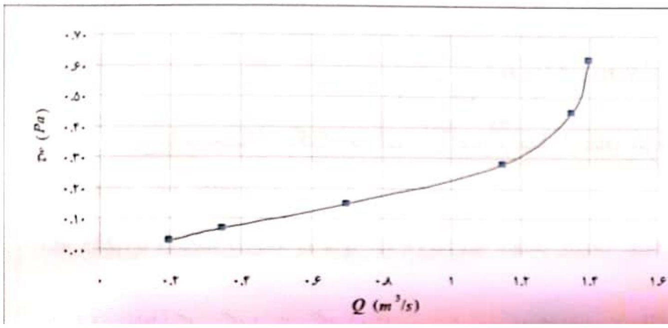
$$\begin{cases} \Pi_1 = \dfrac{Q}{\sqrt{gH^5}} \\ \Pi_2 = \theta \end{cases} \quad ; \quad \frac{Q}{\sqrt{gH^5}} = f(\theta) = Ctg\frac{\theta}{2} \qquad (۱)$$

مقدار ضریب ثابت C از تنها داده‌ی موجود به‌دست آمده و از آنجا رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$C = \frac{Q}{tg\frac{\theta}{2}\sqrt{gH^5}} = \frac{0.068\,m^3/s}{tg\left(\frac{90^\circ}{2}\right)\sqrt{(9.81\,m/s^2)(0.3\,m)^5}} = 0.44 \quad ; \quad \underline{\underline{Q = 0.44tg\frac{\theta}{2}\sqrt{gH^5}}}$$

۵۱-۶

تنش برشی جداره‌ی لوله، τ_w، تابعی از قطر لوله، D، دبی جریان، Q، لزجت سیال، μ، و چگالی سیال، ρ، است. نتایج آزمایش بر روی مدلی از لوله به قطر $۰/۲\ m$ در شکل زیر نشان داده است. اگر قطر لوله در نمونه‌ی اصل $۰/۳\ m$ و دبی جریان $۱/۲\ m^3/s$ باشد، تنش برشی جداره در نمونه‌ی اصل چقدر است؟



پاسخ:

با استفاده از صورت مسأله و جدول (۱-۱) فصل اول، ابعاد متغیرها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tau_w = f(D,Q,\mu,\rho) \quad ; \quad \tau_w \doteq FL^{-2} \quad ; \quad D \doteq L \quad ; \quad Q \doteq L^3T^{-1} \quad ; \quad \rho \doteq FL^{-4}T^2 \quad ; \quad \mu \doteq FL^{-2}T$$

از روش گام‌به‌گام، در هر مرحله یکی از ابعاد اصلی را به‌صورت زیر حذف می‌کنیم تا متغیرهای بی‌بعد به‌دست آید:

$$F: \ \frac{\tau_w}{\underbrace{\rho}_{L^2T^2}} = f_1\left(\underbrace{\frac{D}{L}}, \underbrace{Q}_{L^3T^{-1}}, \underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{L^2T^{-1}}\right) \quad ; \quad L: \ \underbrace{\frac{\tau_w}{\rho D^2}}_{T^2} = f_2\left(\underbrace{\frac{Q}{D^3}}_{T^{-1}}, \underbrace{\frac{\mu}{\rho D^2}}_{T^{-1}}\right)$$

$$T: \ \frac{\tau_w}{\rho D^2}\left(\frac{D^3}{Q}\right)^2 = f_3\left[\frac{Q}{D^3}\left(\frac{D^3}{Q}\right), \frac{\mu}{\rho D^2}\left(\frac{D^3}{Q}\right)\right] \quad ; \quad \frac{\tau_w D^4}{\rho Q^2} = f'\left(\frac{\upsilon D}{Q}\right) \qquad (۱)$$

بنابر اصل شبیه‌سازی، تشابه متغیر بی‌بعد دوم از رابطه‌ی (۱) در مدل و نمونه‌ی اصل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\left(\frac{\upsilon D}{Q}\right)_m = \left(\frac{\upsilon D}{Q}\right)_p \quad ; \quad \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{D_m}{D_p}\frac{\upsilon_m}{\upsilon_p} = \frac{D_m}{D_p}$$

برای این مقدار دبی از روی شکل، مقدار تنش برشی جداره برابر Pa ۰/۱۷ به‌دست می‌آید. بنابر اصل شبیه‌سازی، تشابه متغیر بی‌بعد اول از رابطه‌ی (۱) در مدل و نمونه‌ی اصل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\left(\frac{\tau_w D^4}{\rho Q^2}\right)_m = \left(\frac{\tau_w D^4}{\rho Q^2}\right)_p \quad ; \quad \tau_{w_p} = \tau_{w_m}\left(\frac{D_m}{D_p}\right)^4\left(\frac{Q_p}{Q_m}\right)^2\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right) = \tau_{w_m}\left(\frac{D_m}{D_p}\right)^4\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)$$

$$\tau_{w_p} = \tau_{w_m}\left(\frac{D_m}{D_p}\right)^2\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right) = \tau_{w_p}\,(0.17\,Pa)\left[\frac{(0.2\,m)}{(0.3\,m)}\right]^2(1) \quad ; \quad \underline{\underline{\tau_{w_p} = 0.076 \quad Pa}}$$

۶-۵۵

گلیسیرین در دمای C° ۲۰ با سرعت m/s ۴ درون لوله‌ای به قطر mm ۱۵۰ جریان دارد. مدلی از این سیستم که در آن جریان هوا برقرار است، ساخته می‌شود. چنانچه سرعت هوا m/s ۲ و دمای آن C° ۱۵ باشد، برای برقراری شبیه‌سازی کامل قطر مورد نیاز لوله مدل را محاسبه کنید. مقدار چگالی گلیسیرین در دمای C° ۲۰ و لزجت آن به‌ترتیب برابر kg/m^3 ۱۲۶۰ و $Pa.s$ ۱/۵ و مقدار چگالی هوا در دمای C° ۱۵ و لزجت آن به‌ترتیب برابر kg/m^3 ۱/۲۳ و $Pa.s$ ۰/۰۰۰۰۱۸ است.

پاسخ:

قطر مورد نیاز لوله در مدل با استفاده از تشابه عدد رینولدز [رابطه‌ی (۶-۱۹)] به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{D_p}{D_m}\right) \quad ; \quad D_m = \left(\frac{V_p}{V_m}\right)\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)D_p$$

$$D_m = \frac{(4\,m/s)}{(2\,m/s)}\frac{(0.000018\,Pa.s)}{(1.5\,Pa.s)}\frac{\left(1260\,kg/m^3\right)}{\left(1.23\,kg/m^3\right)}(150\,mm) \quad ; \quad \underline{\underline{D_m = 3.7 \quad mm}}$$

۶-۶۱

گشتاور وارد بر یک زیردریایی با ساخت نمونه‌ی کوچک‌تر با مقیاس ۱:۶۰ در تونل آب در دمای $20^\circ C$ مطالعه می‌شود. چنانچه گشتاور اندازه‌گیری‌شده و سرعت جریان به‌ترتیب $2\ N.m$ و $10\ m/s$ باشد، گشتاور متناظر در نمونه‌ی اصل را به‌دست آورید. مشخصات آب دریا را $\upsilon = 1.2\times10^{-6}\ m^2/s$ و $\rho = 1026\ kg/m^3$ درنظر بگیرید.

پاسخ:

مقدار لزجت سینماتیکی و چگالی آب در دمای $20^\circ C$ از جدول (پ-۳) پیوست به‌ترتیب برابر $1.004\times10^{-6}\ m^2/s$ و $998.2\ kg/m^3$ به‌دست می‌آید. مقدار گشتاور با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{T_p}{T_m} = \frac{F_{D_p}\ell_p}{F_{D_m}\ell_m} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{\upsilon_p}{\upsilon_m}\right)^2\frac{\ell_p}{\ell_m} \quad ; \quad T_p = \frac{F_{D_p}\ell_p}{F_{D_m}\ell_m} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{\upsilon_p}{\upsilon_m}\right)^2\frac{1}{L_r}T_m$$

$$T_p = \frac{\left(1026\, kg/m^3\right)}{\left(998.2\, kg/m^3\right)}\frac{\left(1.2\times10^{-6}\, m^2/s\right)^2}{\left(1.004\times10^{-6}\, m^2/s\right)^2}\frac{1}{(1/60)}\left(2\, N.m\right) \quad ; \quad \underline{\underline{T_p = 176.2 \quad N.m}}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell_p}} = \frac{t_m}{t_p}\times\frac{x_m}{x_p} = \frac{V_m}{V_p} \qquad Fr_p = \frac{V_p}{\sqrt{g_p \ell_p}} = Fr_m$$

۷._۶

$$\frac{t_m}{24} = \sqrt{\frac{1}{500}} \longrightarrow \quad t_m = 0.0447\times 24 = 1.07\,h$$