$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$\boxed{-۵-۳}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}=0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial z}=0 \Rightarrow a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow a_x = -\frac{u_0}{(1-r_0^3/x^3)}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{0+U_0\left(\frac{3r^3}{x^4}\right)}{(1-r_0^3/x^3)^2}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{-u_0}{(1-r_0^3/x^3)} \times \frac{U_0\left(\frac{3r^3}{x^4}\right)}{(1-r_0^3/x^3)^2} = \frac{-3r_0^3U_0^2}{x^4(1-r_0^3/x^3)^3}$$

$\boxed{-۱۰-۳}$ گزینه ۲

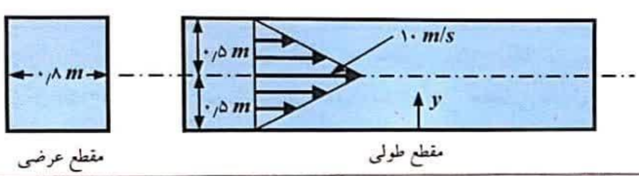
$$V=\frac{Q}{A} \Rightarrow V = \frac{(0.5\times0.5)/3}{0.5\times0.05} = \frac{1}{3} \ m/s$$

$$Q=\int V_n\,dA = \int_0^{x_0}\frac{2}{x_0}\left(x-\frac{x^2}{x_0}\right)(b\,dA) = \int_0^{x_0}\frac{2\times0.5}{x_0}\left(x-\frac{x^2}{x_0}\right)dx$$

$$= \frac{2\times0.5}{x_0}\times\left[\frac{x_0^2}{2}-\frac{x_0^3}{3x_0}\right] = \frac{2\times0.5}{x_0}\times\frac{x_0^2}{6} = \frac{0.5\times0.05}{3}$$

۱۴-۳

هوا در یک مجرای مستطیلی با توزیع فرضی سرعت به‌صورت شکل نشان داده شده، جریان دارد. اگر عرض مجرا $0/8\ m$ باشد، مقادیر دبی، سرعت متوسط و دبی جرمی را به‌دست آورید.



پاسخ:

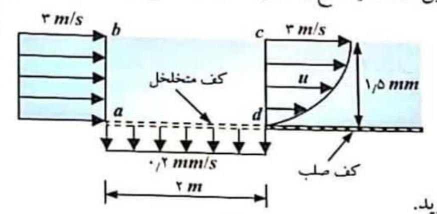
توزیع سرعت و از آنجا مقادیر دبی، سرعت متوسط و دبی جرمی جریان از رابطه‌های (۳-۸) و (۳-۹) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v = \frac{(10\,m/s)-0}{(0.5\,m)}y = 20y \quad ; \quad Q = \int_A (\vec{v}\cdot\hat{n})\,dA = \int_A v_n\,dA = 2\int_0^{0.5}(20y)(0.8dy) = 16\left|y^2\right|_0^{0.5} \quad ; \quad \underline{\underline{Q = 4 \quad m^3/s}}$$

$$\bar{V} = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{Q}{A} = \frac{(4\,m^3/s)}{(1\,m)(0.8\,m)} = \underline{\underline{5 \quad m/s}} \quad ; \quad \dot{m} = \rho Q = (1.23\,kg/m^3)(4\,m^3/s) = \underline{\underline{4.92 \quad kg/s}}$$

۱۹-۳

جریان آب از روی صفحه‌ای با عرض $1/5\ m$ عبور می‌کند. در ابتدای این صفحه [مقطع $(a\text{-}d)$]، کف متخلخل است. سرعت آب در مقطع ورودی $(a\text{-}b)$ و هنگام عبور از کف متخلخل [مقطع $(a\text{-}d)$] یکنواخت است. توزیع سرعت در مقطع $(c\text{-}d)$ به شکل زیر است:



$$\frac{u}{V}=3\left(\frac{y}{\delta}\right)-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}$$

که در آن $V=3\ m/s$ و $\delta=1/5\ mm$ است. مقدار دبی را در مقطع bc به‌دست آورید.

پاسخ:

حجم کنترل ثابت شامل آب بین مقاطع $(a\text{-}b)$، $(b\text{-}c)$، $(c\text{-}d)$ و $(a\text{-}d)$ است. چون مشخصات مسأله با زمان تغییر نمی‌کند، جریان پایدار است. رابطه‌ی پیوستگی [رابطه‌ی (۳-۱۱)] برای این حجم کنترل و از آنجا دبی جرمی مقاطع به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{cs}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=0 \quad ; \quad \int_{ab}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA+\int_{ad}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA+\int_{dc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA+\int_{bc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=0 \qquad (1)$$

دبی جرمی برای مقاطع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_{ab}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=-\rho V_{ab}A_{ab}=-\left(1000\,kg/m^3\right)(3\,m/s)\left[\left(1.5\times10^{-3}\,m\right)(1.5\,m)\right]=-6.75\,kg/s$$

$$\int_{ad}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=+\rho V_{ad}A_{ad}=\left(1000\,kg/m^3\right)(0.0002\,m/s)\left[(2\,m)(1.5\,m)\right]=0.60\,kg/s$$

$$\int_{dc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=\rho b\int_{dc}v\,dy=\rho b\int_0^{\delta}V\left[3\frac{y}{\delta}-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1.5}\right]dy=\rho bV\left|\frac{3}{2}\frac{y^2}{\delta}-\frac{2\delta}{2.5}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{2.5}\right|_0^{\delta}=\rho bV\left(\frac{3}{2}\delta-\frac{2\delta}{2.5}\right)$$

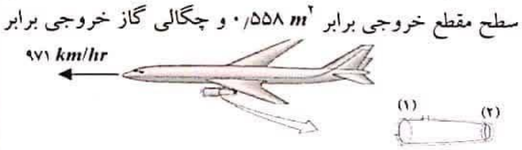
$$\int_{dc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=0.7\rho bV\delta=0.7\left(1000\,kg/m^3\right)(1.5\,m)(3\,m/s)\left(1.5\times10^{-3}\,m\right)=4.73\,kg/s$$

با جایگزینی جملات فوق، رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{bc}\rho(\vec{v}.\vec{n})dA=\dot{m}_{bc}=(6.75\,kg/s)-(0.60\,kg/s)-(4.73\,kg/s) \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{m}_{bc}=1.42\quad kg/s}}$$

۳۰-۳

هواپیمایی با سرعت $971\ km/hr$ در حرکت است. مساحت مقطع ورودی موتور هواپیما [مقطع (۱)] برابر $0/8\ m^2$ و چگالی هوایی که وارد موتور می‌شود برابر $0/736\ kg/m^3$ است. سرعت گاز خروجی ناشی از احتراق در داخل موتور که از مقطع خروجی [مقطع (۲)] موتور عبور می‌کند از دیدگاه ناظری ثابت برابر $1050\ km/hr$ است. سطح مقطع خروجی برابر $0/558\ m^2$ و چگالی گاز خروجی برابر $0/515\ kg/m^3$ است. مقدار سوخت مصرفی هواپیما را تعیین کنید.



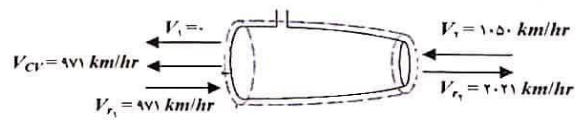
پاسخ:

چون مشخصات مسأله با زمان تغییر نمی‌کند، جریان پایدار است. با درنظر گرفتن سرعت یکنواخت در مقاطع، رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل متحرک که منطبق بر موتور است [رابطه‌ی (۳-۱۴)] برای جریان پایدار به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{cs}\rho(\vec{v}_r\cdot\vec{n})dA=0$$

$$-\dot{m}_{fuel}-\rho_1V_{r_1}A_1+\rho_2V_{r_2}A_2=0$$

$$\dot{m}_{fuel}=\rho_2V_{r_2}A_2-\rho_1V_{r_1}A_1 \qquad (1)$$



مقادیر سرعت مطلق و سرعت نسبی در شکل نشان داده شده است. سرعت حجم کنترل برابر سرعت هواپیما، $V_{CV}=970\ km/hr$ است. با استفاده از قانون سرعت‌ها [رابطه‌ی (۳-۱۵)] خواهیم داشت:

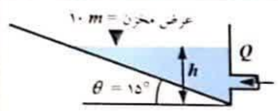
$$\vec{V}=\vec{V}_r+\vec{V}_{cv} \quad ; \quad \begin{cases}V_{r_1}=V_1-V_{CV}=0-(-971\,km/hr)=971\,km/hr\\ V_{r_2}=V_2-V_{CV}=(1050\,km/hr)-(-971\,km/hr)=2021\,km/hr\end{cases}$$

با جایگزینی مقادیر سرعت نسبی در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\dot{m}_{fuel}=\left(0.515\,kg/m^3\right)\left(2021\times10^3\,m/hr\right)\left(0.558\,m^2\right)-\left(0.736\,kg/m^3\right)\left(971\times10^3\,m/hr\right)\left(0.80\,m^2\right)=\underline{\underline{9050\quad kg/hr}}$$

۳-۳۵

مخزن آب با مقطع مثلثی و عرض ثابت در شکل مشاهده می‌گردد. آب با دبی $Q = 100\ L/s$ به این مخزن افزوده می‌گردد. رابطه‌ای برای dh/dt به‌دست آورید که در آن h ارتفاع آب در مخزن در هر لحظه است. چه مدت زمانی طول خواهد کشید تا ارتفاع آب از $h = 1/0\ m$ به $h = 1/2\ m$ برسد؟



پاسخ:

از حجم کنترل شکل‌پذیر استفاده می‌شود، اگرچه می‌توان حجم کنترل ثابت نیز انتخاب کرد. حجم کنترل شامل آب در مخزن در هر لحظه است. لذا، سطح آزاد آب در مخزن متغیر است و حجم کنترل شکل‌پذیر است. سطح کنترل بالایی آن با سرعت $\partial h/\partial t$ در حال حرکت است. به بیانی دیگر، ارتفاع آب در این حجم کنترل در هر لحظه برابر h است. از این سطح هیچ جریانی عبور نمی‌کند و چون ارتفاع آب تغییر می‌کند، جریان ناپایدار است. رابطه‌ی پیوستگی [رابطه‌ی (۳-۱۴)] به‌صورت زیر ساده می‌شود:

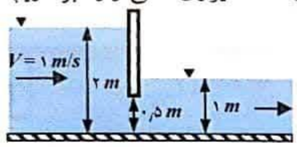
$$\frac{\partial}{\partial t}(\forall_w) - Q = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{h}{tg(\theta)}\right](h)(b)\right\} - Q = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{h}{tg(15^\circ)}\right]h(10\,m)\right\} - \left(0.10\,m^3/s\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[18.66h^2\right] = 0.10 \quad ; \quad 37.32h\frac{dh}{dt} = 0.10 \quad ; \quad \frac{dh}{dt} = \frac{0.00268}{h} \quad ; \quad 0.00268\,dt = h\,dh$$

$$0.00268\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{1}^{1.2} h\,dh \quad ; \quad 0.00268(t_2 - t_1) = 0.00268\,\Delta t = \frac{1}{2}\left[h^2\right]_1^{1.2} \quad ; \quad \underline{\underline{\Delta t = 82.1\ \ s}}$$

۳-۴۲

در شکل روبه‌روآب از زیر دریچه‌ای به پهنای ۲ متر در حال عبور است. نیروی افقی وارد بر دریچه برابر است با ($g = 10\ m/s^2$ ،$\rho = 1000\ kg/m^3$):



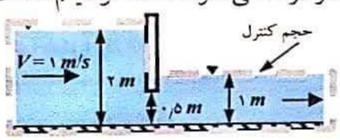
۱) $30000\ N$
۲) $4000\ N$
۳) $20000\ N$
۴) $26000\ N$

پاسخ:

گزینه‌ی (۴). رابطه‌ی اندازه‌حرکت [رابطه‌ی (۳-۱۸)] در جهت جریان برای حجم کنترل نشان داده شده درشکل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{CS}\rho Q V_x = \sum_{CV} F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 + R_x$$

توزیع فشار در بالادست دریچه [مقطع (۱)] و در پایین‌دست دریچه [مقطع (۲)] هیدرواستاتیک درنظر گرفته می‌شود. لذا، خواهیم داشت:



$$(-\dot m_1)(+V_1) + (\dot m_2)(+V_2) = \frac{1}{2}(\gamma h_1)(h_1 B) - \frac{1}{2}(\gamma h_2)(h_2 B) - R_x$$

$$R_x = \dot m_2 V_2 - \dot m_1 V_1 - \frac{1}{2}B\gamma h_1^2 + \frac{1}{2}B\gamma h_2^2 \qquad (1)$$

که در آن B پهنای دریچه است و علامت دبی جرمی برای جریان ورودی منفی و جریان خروجی مثبت است. رابطه‌ی پیوستگی [رابطه‌ی (۳-۱۱)] برای همان حجم کنترل و از آنجا رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad ; \quad (1\,m/s)\left[(2\,m)(2\,m)\right] = V_2\left[(1\,m)(2\,m)\right] \quad ; \quad V_2 = 2\ m/s$$

$$R_x = \frac{1}{2}B\gamma\left(h_1^2 - h_2^2\right) - \dot m\left(V_2 - V_1\right) = \frac{1}{2}B\gamma\left(h_1^2 - h_2^2\right) - \rho V_1 A_1\left(V_2 - V_1\right)$$

$$R_x = \frac{1}{2}(2\,m)\left(10000\,N/m^3\right)\left[(2\,m)^2 - (1\,m)^2\right] - \left(1000\,kg/m^3\right)(1\,m/s)\left[(2\,m)(2\,m)\right]\left[(2-1)\,m/s\right] = \underline{\underline{26000\ \ N}}$$

۴۸-۳ جت آبی به یک بلوک برخورد کرده و مسیر آن تحت زاویه‌ی °۳۰ منحرف می گردد. مقدار دبی جرمی ۱ kg/s و سرعت جت ۱۰ m/s است. جرم بلوک ۱ kg و مقدار ضریب اصطکاک بلوک و زمین (نسبت نیروی اصطکاک به نیروی عکس‌العمل قایم) ۰/۱ است. اگر نیروی افقی که جت آب بر بلوک وارد می‌کند از نیروی اصطکاک بیشتر شود، بلوک شروع به حرکت می‌کند. در اینجا مشخص کنید که آیا بلوک حرکت خواهد کرد. از وزن آب صرف‌نظر کنید و فرض کنید که سرعت جت آب در طول مسیر ثابت است.

پاسخ:

رابطه‌ی (۳-۱۸) در جهت افقی برای حجم کنترلی که شامل جت آب است (R_x نیروی عکس‌العمل) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{CS} \rho Q V_x = \sum_{CV} F_x \quad ; \quad V_{x,1}(-\dot{m}) + V_{x,2}(\dot{m}) = R_x$$

$$R_x = \dot{m}(V_{x,1} - V_{x,2}) = (1\,kg/s)\left[(10\,m/s) - (10\,m/s)\cos 30^\circ\right] \quad ; \quad R_x = 1.34\,N$$

که در آن مقاطع (۱) و (۲) در ابتدا و انتهای جت قرار دارد. در جهت قایم نیز رابطه‌ی اندازه حرکت به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R_y = \dot{m}(V_{y,2} - V_{y,1}) = (1\,kg/s)\left[(10\,m/s)\sin 30^\circ - 0\right] \quad ; \quad R_y = 5\,N$$

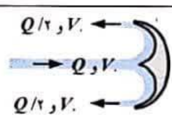
برای اینکه بلوک حرکت نکند، باید نیروی اصطکاک و وزن بلوک بیشتر از نیروهای عکس‌العمل باشد. لذا خواهیم داشت:

$$W = mg = (1\,kg)(9.81\,m/s^2) \quad ; \quad W = 9.8\,N > R_y \quad ; \quad Friction\ factor = \frac{F_f}{F_N} = \frac{F_f}{R_y + W}$$

$$(0.1) = \frac{F_f}{(5\,N) + (9.8\,N)} \quad ; \quad F_f = 1.48\,N > R_x$$

بلوک حرکت نمی‌کند.

۵۳-۳ در شکل روبه‌رو نیروی افقی وارد از طرف سیال بر صفحه چقدر است؟



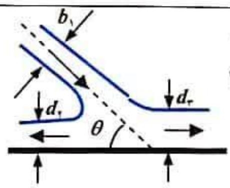
۱) ۱/۲ $\rho Q V_\circ$ ۲) $\rho Q V_\circ$ ۳) ۲ $\rho Q V_\circ$ ۴) ۴ $\rho Q V_\circ$

پاسخ:

گزینه‌ی (۳). فرض بر این است که جت در صفحه‌ی افقی قرار دارد و وزن، مؤلفه‌ای در رابطه‌ی اندازه حرکت ندارد. مقدار عکس‌العمل افقی جت بر پره از رابطه‌ی اندازه حرکت [رابطه‌ی (۳-۱۸)] در راستای جت برای حجم کنترل ثابت شامل جت آب از ورودی تا خروجی‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (توجه داشته باشید که فشار نسبی جت، صفر است):

$$\sum_{CS} \rho Q V_x = \sum_{CV} F_x \quad ; \quad (-\rho Q)(+V_0) + \left(\rho \frac{Q}{2}\right)(-V_0) + \left(\rho \frac{Q}{2}\right)(-V_0) = -R_x \quad ; \quad R_x = 2\rho Q V_0$$

۵۶-۳



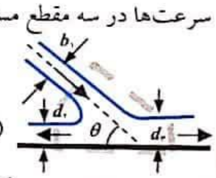
در شکل زیر یک جریان جت به دیوار مقابل برخورد می‌کند. اگر سرعت در مقاطع ۱، ۲ و ۳ مساوی بوده و از اثر شتاب ثقل صرف‌نظر شود، d_3 به‌عنوان تابعی از b_1 و θ کدام می‌باشد؟

۱) $d_3 = \cos\theta (b_1/2)$ ۲) $d_3 = b_1(1-\cos\theta)$

۳) $d_3 = b_1/2(1+\cos\theta)$ ۴) $d_3 = b_1/2(1-2\cos\theta)$

پاسخ:

گزینه‌ی (۳). حجم کنترل ثابت در شکل با خط‌چین خاکستری نشان داده شده است. چون در راستای صفحه هیچ نیروی خارجی وجود ندارد، عکس‌العمل نیروی جت بر صفحه در این راستا صفر است. لذا، نیروی عکس‌العمل جت بر دیواره، در امتداد قایم است. چون سرعت‌ها در سه مقطع مساوی است، رابطه‌ی اندازه حرکت [رابطه‌ی (۳-۱۸)] در جهت افقی برای واحد عرض به‌صورت زیر درمی‌آید:



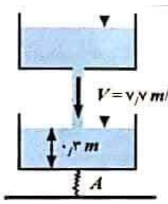
$$\sum_{CS} \rho Q V_x = \sum_{CV} F_x = 0 \quad ; \quad (-\rho Q_1)(+V_1\cos\theta) + (\rho Q_2)(-V_2) + (\rho Q_2)(+V_2) = 0$$

$$-V^2 A_1 \cos\theta - V^2 A_2 + V^2 A_3 = 0 \quad ; \quad -b_1\cos\theta - d_2 + d_3 = 0 \quad ; \quad d_2 = d_3 - b_1\cos\theta \qquad (1)$$

از طرفی، رابطه‌ی پیوستگی [رابطه‌ی (۳-۳۱)] در واحد عرض برای همان حجم کنترل و از آنجا رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad ; \quad b_1 = d_2 + d_3 \quad ; \quad b_1 = (d_3 - b_1\cos\theta) + d_3 \quad ; \quad \underline{\underline{d_3 = \frac{b_1}{2}(1+\cos\theta)}}$$

۶۱-۳



از روزنه‌ی مخزن بالایی آب با دبی $0.04\ m^3/s$ به مخزن پایینی با سرعت قایم $7.7\ m/s$ برخورد می‌کند. درصورتی‌که مساحت کف مخزن پایینی یک مترمربع و ارتفاع مایع داخل آن ثابت و برابر با ۰٫۳ متر و وزن خالی مخزن پایینی ۸۰۰ نیوتن باشد، نیروی اندازه‌گیری‌شده توسط ترازوی A چند نیوتن می‌باشد. ($g = 10\ m/s^2$، $\rho = 10^3\ kg/m^3$).

۱) ۴۰۵۱   ۲) ۵۹۶۳   ۳) ۱۳۰۸   ۴) ۲۹۴۳

پاسخ:

گزینه‌ی (۱). رابطه‌ی (۳-۱۸) در جهت قایم برای حجم کنترل ثابت شامل آب در مخزن پایینی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{CS} \rho Q V_z = \sum_{CV} F_z \quad ; \quad (-\rho Q)(-V) = -W_w - W_R + R_z \quad ; \quad R_z = \rho Q V + W_w + W_R \qquad (1)$$

که در آن R_z نیروی وارد بر ترازو، W_w وزن آب در مخزن و W_R وزن مخزن است. رابطه‌ی (۱) با داده‌های مسأله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R_z = (1000\,kg/m^3)(0.04\,m^3/s)(7.7\,m/s) + (9810\,N/m^3)\left[(1\,m^2)(0.3\,m)\right] + (800\,N)$$

$$R_z = (308\,N) + (2943\,N) + (800\,N) \quad ; \quad \underline{\underline{R_z = 4051 \quad N}}$$

$\boxed{-۶۸-۳}$

$$\beta = \frac{\int_A \vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA}{\dot{m}\bar{\vec{V}}}$$

$$\int_A \vec{V}\rho(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA = 2\int_A (y-r)\,\rho\,(y-r)\,w\,dy = 2\rho w\int_A (y-r)^2\,dy$$

$$= 2\rho w\int_A (y^2+r^2-2ry)\,dy = 2\rho w\left(\frac{r^3}{3} + r^3 - r^3\right) = 2\rho w\frac{r^3}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{m}v &= \rho w r^2 \\ \bar{\vec{V}} &= \frac{\rho w r^2}{\rho w \times 2r} = \frac{r}{2} \end{aligned}\right\} \dot{m}\bar{\vec{V}} = \rho w\frac{r^3}{2} \quad \Rightarrow \beta = \frac{2\rho w\, r^3/3}{\rho w\, r^3/2} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۴