

کاربرد درونیابی اسپلاین درجه سه در روش مشخصه‌ها برای حل ضربه قوچ

علیرضا رستمی، کارشناس ارشد عمران - آب، مشهد*

محمد رضا چمنی، استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان**

کیوان اصغری، استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

*تلفن ۰۵۱۱-۲۷۰۹۷۰۲، پست الکترونیکی: rostami_ar@hotmail.com

**تلفن ۰۳۱۱-۳۹۱۳۸۳۷، نمابر: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۷۰۰، پست الکترونیکی: mchamani@cc.iut.ac.ir

چکیده

از دهه هفتاد تا به امروز روش مشخصه‌ها (*Characteristics method*) با شبکه ثابت، بطور موفقیت آمیزی برای تحلیل شرایط میرایی جریان در شبکه‌ها و خطوط انتقال آب بکار می‌رود. هنگام تحلیل میرایی جریان در شبکه‌ها و خطوط انتقال آب، به علت عدم ارضاء کامل شرط کورانت، استفاده از روشهای درونیابی امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. بنابراین روشهای درونیابی خطی و غیرخطی مختلفی توسط محققین ارائه شده است که اکثر این روش‌های درونیابی ضمن آنکه در روابط کلاسیک ضربه قوچ بکار رفته‌اند، بیشتر از دیدگاه تئوری مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این مقاله، روش درونیابی خطی و نیز روش پیشنهادی درونیابی اسپلاین درجه سه (*Cubic Spline Interpolation*)، روی خطوط زمانی و در روابط کامل ضربه قوچ توسعه داده شده است. هر دو روش در یک خط انتقال آب شامل سه لوله سری و با شرایط مرزی مخزن و شیر واقعی مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که هر دو روش در گام‌های زمانی بسیار کوچک به یک جواب واحد می‌رسند. همچنین، در شرایطی که از گام زمانی بزرگ در تحلیل استفاده می‌شود، درونیابی غیرخطی درجه سه اگرچه زمان پردازش نسبتاً بالاتری دارد اما جواب‌های بسیار بهتری نسبت به درونیابی خطی ارائه می‌کند.

کلید واژه‌ها: ضربه قوچ، جریان میرا، روش مشخصه‌ها، درونیابی اسپلاین درجه سه

۱- مقدمه

ضربه قوچ (*Water hammer*) پدیده‌ای است که در خطوط انتقال سیالات، در اثر تغییرات ناگهانی اندازه حرکت جریان در مجاری باز و بسته روی می‌دهد. این تغییرات اندازه حرکت به تغییرات فشاری تبدیل شده و به صورت موج‌های فشاری با سرعت زیاد در سیستم انتقال انعکاس می‌یابد تا زمانی که موج‌های فشاری مستهلک گشته و از بین بروند. بنابراین، می‌توان آنرا یک جریان ناماندگار میرا که بین دو جریان ماندگار روی می‌دهد، نامگذاری کرد. معمولاً حل مسائل ضربه قوچ با استفاده از نظریه الاستیک (*Elastic theory*) در حالت یک بعدی جریان صورت می‌پذیرد [۱]. به کمک این نظریه،

برای تحلیل این پدیده در لوله‌ها، روابط کامل اندازه حرکت و پیوستگی به قرار زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} + g \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{f}{2D} V|V| = 0 \quad (1)$$

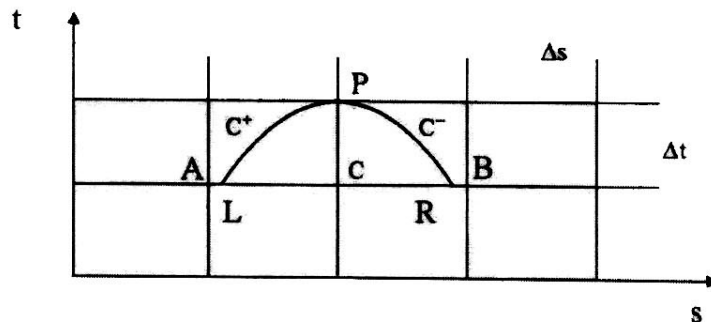
$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial s} - V \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

که در روابط فوق V و H سرعت و بار فشاری جریان، g شتاب ثقل، a سرعت انتشار موج، α زاویه خط لوله با تراز افق، f ضریب دارسی- ویسباخ، D قطر لوله و t و s مؤلفه‌های زمانی و مکانی پارامترهای سرعت و بار فشار می‌باشند. اگر از روابط فوق ترم‌های جابجائی (ترم‌های دوم) حذف شوند، روابط تقریبی ضربه قوچ و نیز اگر از روابط تقریبی ترم‌های اصطکاک و شیب خطوط لوله حذف گردند، روابط کلاسیک ضربه قوچ، بدست خواهند آمد. روابط فوق را می‌توان با تشکیل شبکه منظم (شبکه ثابت) یا نامنظم (منحنی‌های مشخصه) حل کرد. در بیشتر مسائل مربوط به خطوط انتقال آب، از روش شبکه منظم استفاده می‌شود. هنگام تشکیل شبکه منظم برای تحلیل میراثی جریان، باید دو شرط اساسی ارضاء شود: (۱) رعایت شرط پایداری در محاسبات که برای حصول به این نتیجه باید عدد کورانت $(C_r = (a + V) \frac{\Delta t}{\Delta s})$ ، کمتر یا مساوی عدد یک گردد، (۲) شرط بکارگیری گام زمانی حداقل (گام زمانی در کوتاهترین لوله) در محاسبه عدد کورانت لوله‌ها.

با اعمال دو شرط فوق و نظر به اینکه سرعت موج و طول لوله در اجزاء خط انتقال متفاوت می‌باشد، بالطبع عدد کورانت متفاوتی برای هر لوله بدست آمده و در نتیجه پای خطوط مشخصه‌ها در نقاط گرهی شبکه فرود نخواهد آمد. در چنین حالتی، با بکارگیری روش مشخصه‌ها، فرم تفاضل محدود روابط (۱) و (۲) برای بازه نشان داده شده در شکل (۱) به صورت زیر خواهد بود [۱،۲].

$$C^+ : \frac{V_P - V_L}{\Delta t} + \frac{g}{a} \frac{H_P - H_L}{\Delta t} - \frac{g}{a} V_L \sin \alpha + \frac{f}{2D} V_L |V_L| = 0 \quad \text{only when} \quad \frac{ds}{dt} = a + V_L \quad (3)$$

$$C^- : \frac{V_P - V_R}{\Delta t} - \frac{g}{a} \frac{H_P - H_R}{\Delta t} + \frac{g}{a} V_R \sin \alpha + \frac{f}{2D} V_R |V_R| = 0 \quad \text{only when} \quad \frac{ds}{dt} = a - V_R \quad (4)$$



شکل ۱: شبکه منظم $s-t$ و عدم ارضاء عدد کورانت

برای تحلیل این پدیده در لوله‌ها، روابط کامل اندازه حرکت و پیوستگی به قرار زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} + g \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{f}{2D} V|V| = 0 \quad (1)$$

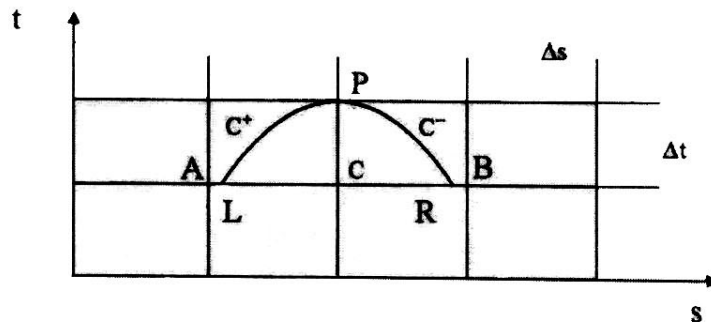
$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial s} - V \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

که در روابط فوق V و H سرعت و بار فشاری جریان، g شتاب ثقل، a سرعت انتشار موج، α زاویه خط لوله با تراز افق، f ضریب دارسی-ویسباخ، D قطر لوله و t و s مؤلفه‌های زمانی و مکانی پارامترهای سرعت و بار فشار می‌باشند. اگر از روابط فوق ترم‌های جابجائی (ترم‌های دوم) حذف شوند، روابط تقریبی ضربه قوچ و نیز اگر از روابط تقریبی ترم‌های اصطکاک و شیب خطوط لوله حذف گردند، روابط کلاسیک ضربه قوچ، بدست خواهند آمد. روابط فوق را می‌توان با تشکیل شبکه منظم (شبکه ثابت) یا نامنظم (منحنی‌های مشخصه) حل کرد. در بیشتر مسائل مربوط به خطوط انتقال آب، از روش شبکه منظم استفاده می‌شود. هنگام تشکیل شبکه منظم برای تحلیل میراثی جریان، باید دو شرط اساسی ارضاء شود: (۱) رعایت شرط پایداری در محاسبات که برای حصول به این نتیجه باید عدد کورانت $(C_r = (a + V) \frac{\Delta t}{\Delta s})$ ، کمتر یا مساوی عدد یک گردد، (۲) شرط بکارگیری گام زمانی حداقل (گام زمانی در کوتاهترین لوله) در محاسبه عدد کورانت لوله‌ها.

با اعمال دو شرط فوق و نظر به اینکه سرعت موج و طول لوله در اجزاء خط انتقال متفاوت می‌باشد، بالطبع عدد کورانت متفاوتی برای هر لوله بدست آمده و در نتیجه پای خطوط مشخصه‌ها در نقاط گرهی شبکه فرود نخواهد آمد. در چنین حالتی، با بکارگیری روش مشخصه‌ها، فرم تفاضل محدود روابط (۱) و (۲) برای بازه نشان داده شده در شکل (۱) به صورت زیر خواهد بود [۱،۲].

$$C^+ : \frac{V_P - V_L}{\Delta t} + \frac{g}{a} \frac{H_P - H_L}{\Delta t} - \frac{g}{a} V_L \sin \alpha + \frac{f}{2D} V_L |V_L| = 0 \quad \text{only when} \quad \frac{ds}{dt} = a + V_L \quad (3)$$

$$C^- : \frac{V_P - V_R}{\Delta t} - \frac{g}{a} \frac{H_P - H_R}{\Delta t} + \frac{g}{a} V_L \sin \alpha + \frac{f}{2D} V_R |V_R| = 0 \quad \text{only when} \quad \frac{ds}{dt} = a - V_R \quad (4)$$



شکل ۱: شبکه منظم $s-t$ و عدم ارضاء عدد کورانت

روابط (۳) و (۴) نشان می‌دهند که برای بدست آوردن مقادیر V_p و H_p باید با تمهیداتی مقادیر V_R ، V_L ، H_R و H_L را از طریق درونیابی بدست آورد.

۲- تاریخچه کاربرد روش‌های درونیابی در تحلیل ضربه قوچ

هرتری در سال ۱۹۵۸، درونیابی روی خط مکانی را برای روابط کلاسیک ضربه قوچ ارائه کرد [۳]. در سال ۱۹۶۲، استریتر و لای از درونیابی هرتری در روابط کامل ضربه قوچ، جهت مقایسه نتایج آزمایشگاهی با روش مشخصه‌ها استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها با مقادیر واقعی مطابقت دارد [۴]. در سال ۱۹۶۴ استریتر مفهوم دسترسی به خط زمانی را برای اولین بار ارائه کرد که به روش درونیابی خطی زمانی ریچبک (Reachback time-line interpolation) معروف گردید [۵]. سپس، این روش توسط تریکا در سال ۱۹۷۷ برای حل مسائل سیستم‌های چند لوله‌ای بکار برده شد [۳]. در سال ۱۹۸۳، گلدبرگ و وایلی در مطالعات خود به این نتیجه رسیدند که روش درونیابی ریچبک در مقایسه با روش درونیابی مکانی هرتری خطای هدردهی (Dissipation) کمتری دارد [۳]. برانسکی و هالی در سال ۱۹۸۶ و شول و هالی در سال ۱۹۹۱ روش مشخصه‌ها را با درونیابی اسپلاین برای مسئله حرکت افقی آلایند بکار بردند [۶]. کارهای انجام شده در این زمینه ایده‌ای شد تا سایبروس و همکارانش در سال ۱۹۹۱ سه روش مختلف درونیابی اسپلاین درجه سه و یک روش درونیابی هرमित (Hermite) درجه چهار را برای حل روابط کلاسیک ضربه قوچ در یک لوله با شرایط مرزی مخزن و بستن لحظه‌ای شیر بکار ببرند [۶]. آنها درونیابی‌ها را روی خط مکانی و بدون در نظر گرفتن شرط پایداری انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که درونیابی اسپلاین در مقایسه با درونیابی خطی از دقت بهتری برخوردار است، اما زمان پردازش بیشتری را دارا می‌باشد. همچنین، در روش اسپلاین می‌توان از گام زمانی بزرگتری بدون آنکه از دقت مسئله کم شود، استفاده کرد.

۳- روش تحقیق

با توجه به آنچه که در بخش‌های قبل آمد، رئوس کلی تحقیق در این مقاله بصورت زیر می‌باشد:

- روابط پایه برای درونیابی خطی روی خط زمانی (LT) و نیز درونیابی پیشنهادی اسپلاین درجه سه روی خط زمانی (NT) در یک المان از شبکه بدست آمده است. (۲) یک برنامه رایانه‌ای متشکل از چند زیربرنامه براساس روش‌های ذکر شده در روابط کلاسیک ضربه قوچ توسعه داده شده است. (۳) صحت برنامه رایانه‌ای توسط یک مسئله که حل دقیق (فقط برای روابط کلاسیک ضربه قوچ حل دقیق وجود دارد) آن موجود بوده، مورد آزمایش قرار گرفته است. (۴) ترم‌های جابجائی، اصطکاک و نیز شیب خط لوله به هسته اصلی برنامه

افزوده گردیده تا برنامه رایانه‌ای فوق برای روابط کامل نیز مورد استفاده قرار گیرد. (۵) روش‌های درونیابی فوق به کمک برنامه رایانه‌ای تکمیل شده، در یک مسئله کاربردی مورد مقایسه و نقد قرار گرفته‌اند.

۴- درونیابی خطی روی خط زمانی

با در نظر گرفتن یک المان از شبکه (شکل ۲) سعی می‌شود روابط پایه درونیابی زمانی برای روابط کامل ضربه قوچ بدست آید. با فرض خطی بودن تغییرات سرعت و بار فشار در میان گره‌های A و D، می‌توان نوشت [V]:

$$V_L = V_A + (V_D - V_A)Y_L \quad \text{with in} \quad 0 \leq Y_L = \frac{y_L}{\Delta t} \leq 1 \quad (5)$$

$$H_L = H_A + (H_D - H_A)Y_L \quad \text{with in} \quad 0 \leq Y_L = \frac{y_L}{\Delta t} \leq 1 \quad (6)$$

و از شیب C^+ ، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\Delta s}{(a + V_L)} = \frac{\Delta t(1 + Y_L)}{1} \Rightarrow Y_L = \frac{\Delta s}{\Delta t(a + V_L)} - 1 \quad (7)$$

حذف V_L از روابط (۵) و (۷)، رابطه زیر را نتیجه خواهد داد:

$$(V_D - V_A)Y_L^2 + (V_D + a)Y_L + V_A + a - \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0 \quad (8)$$

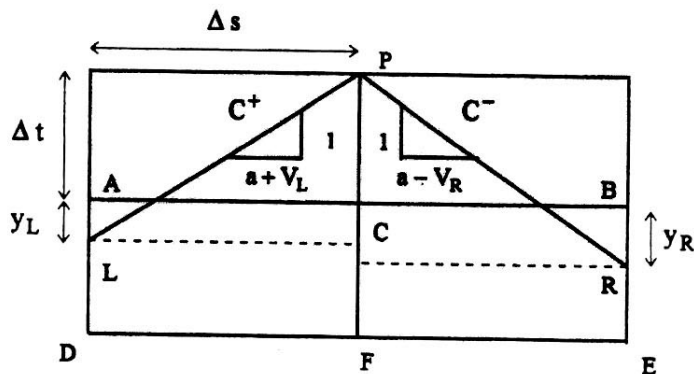
از حل رابطه اخیر، Y_L بدست آمده و با جایگذاری آن در روابط (۵) و (۶)، مقادیر V_L و H_L بدست خواهد آمد. به روش مشابه برای مشخصه C^- نیز می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$V_R = V_B + (V_E - V_B)Y_R \quad \text{with in} \quad 0 \leq Y_R = \frac{y_R}{\Delta t} \leq 1 \quad (9)$$

$$H_R = H_B + (H_E - H_B)Y_R \quad \text{with in} \quad 0 \leq Y_R = \frac{y_R}{\Delta t} \leq 1 \quad (10)$$

$$\frac{\Delta s}{(a - V_R)} = \frac{\Delta t(1 + Y_R)}{1} \Rightarrow Y_R = \frac{\Delta s}{\Delta t(a - V_R)} - 1 \quad (11)$$

$$(V_E - V_B)Y_R^2 + (V_E - a)Y_R + V_B - a + \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0 \quad (12)$$



شکل ۲: درونیابی روی خط زمانی

حال با قراردادن مقادیر V_L, H_L, V_R, H_L در روابط (۳) و (۴)، مقادیر V_p و H_p برای گام زمانی جاری بدست خواهند آمد. قابل ذکر است که از Y های حاصل از حل روابط (۸) و (۱۲) آنهایی قابل قبولاند که سبب می شوند پای مشخصه های C^+ و C^- در محدوده دو گام زمانی قبل (بازه های AD و BE) قرار گیرند، چرا که در غیر اینصورت شرایط پایداری ارضاء نخواهد شد.

۵- درونیایی اسپلین درجه سه روی خط زمانی

در این روش پیشنهادی با فرض تغییرات غیرخطی سرعت و بار فشار و به کمک الگوریتم اسپلین درجه سه، یک چند جمله ای درجه سه برای هر یک از متغیرهای سرعت و بار در فواصل زمانی بین گره های D و A (برای C^+) و E و B (برای C^-) به قرار زیر به دست آورده می شود (شکل ۲): $[V]$:

$$V_L = V_D + b_L^V(1 - Y_L) + c_L^V(1 - Y_L)^2 + d_L^V(1 - Y_L)^3 \quad (13)$$

$$H_L = H_D + b_L^H(1 - Y_L) + c_L^H(1 - Y_L)^2 + d_L^H(1 - Y_L)^3 \quad (14)$$

$$V_R = V_E + b_R^V(1 - Y_R) + c_R^V(1 - Y_R)^2 + d_R^V(1 - Y_R)^3 \quad (15)$$

$$H_R = H_E + b_R^H(1 - Y_R) + c_R^H(1 - Y_R)^2 + d_R^H(1 - Y_R)^3 \quad (16)$$

قابل ذکر است که برای یافتن توابع درجه سه بین گره ها از حداقل تعداد نقاط (سه گره) استفاده شده است. با روشی مشابه با آنچه که در بخش قبل آمد، برای مشخصه های C^+ و C^- می توان روابط زیر را به دست آورد:

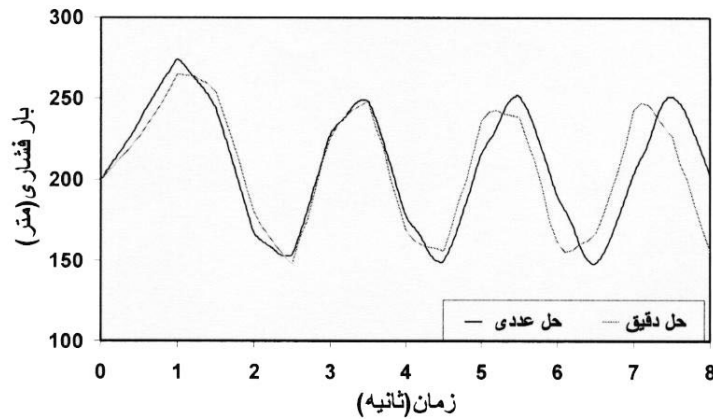
$$d_L^V Y_L^4 - (2d_L^V + c_L^V) Y_L^3 + (c_L^V + b_L^V) Y_L^2 + (2d_L^V + c_L^V - a - V_D) Y_L - \left(d_L^V + c_L^V + b_L^V - \frac{\Delta s}{\Delta t} + a + V_D \right) = 0 \quad (17)$$

$$d_R^V Y_R^4 - (2d_R^V + c_R^V) Y_R^3 + (c_R^V + b_R^V) Y_R^2 + (2d_R^V + c_R^V + a - V_E) Y_R - \left(d_R^V + c_R^V + b_R^V + \frac{\Delta s}{\Delta t} - a + V_E \right) = 0 \quad (18)$$

از حل روابط فوق به کمک زیربرنامه حل روابط چندجمله ای، مقادیر Y_L و Y_R محاسبه شده و با جایگذاری آن در روابط (۱۳) الی (۱۶) مقادیر V_L, H_L, V_R, H_R به دست می آید. با داشتن مقادیر فوق و جایگذاری آنها در روابط (۳) و (۴)، مقادیر V_p و H_p برای گام زمانی جاری بدست خواهند آمد.

۶- مقایسه روشهای درونیایی

ابتدا صحت برنامه رایانه ای که برای روابط کلاسیک توسعه داده شده با یک مسئله که حل دقیق آن موجود می باشد، تأیید می شود، شکل (۳) [۸]. سپس ترم های مربوطه به هسته برنامه رایانه ای افزوده می گردد تا برنامه فوق برای روابط کامل و نیز مسئله کاربردی مورد استفاده قرار گیرد. صورت مسئله کاربردی بدین شرح است که آب با دبی ۲۱۰ لیتر در ثانیه در سه لوله سری با ضریب اصطکاک 0.021 که به یک مخزن با بار ثابت



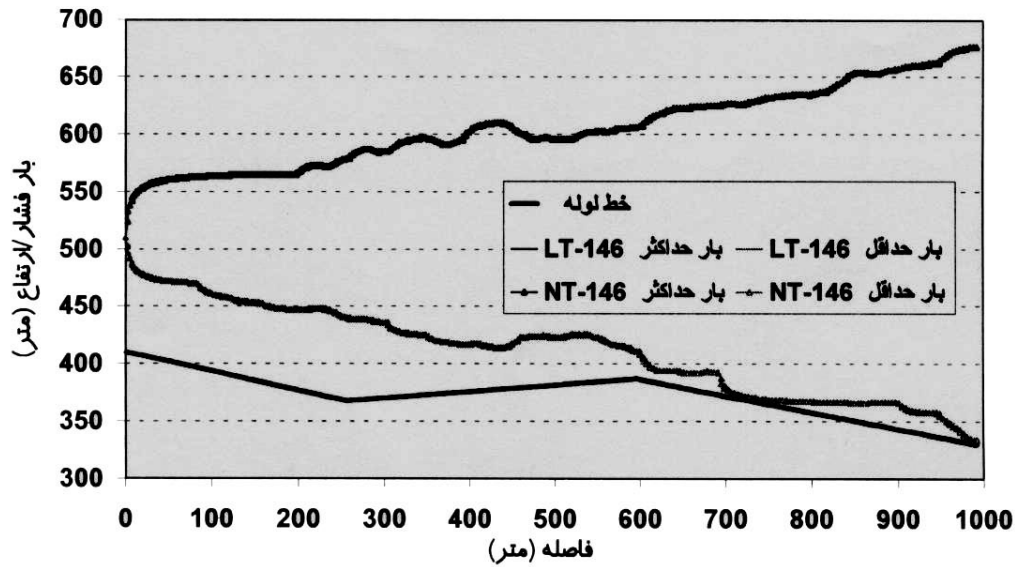
شکل ۳: مقایسه تغییرات بار فشار نسبت به زمان در محل شیر

۱۰۰ متر متصل می‌باشند (در تراز ۴۱۰ متر)، جریان دارد. در انتهای لوله آخر (تراز ۳۳۰ متر)، یک شیر با الگوی افت نشان داده شده در جدول (۱) وجود دارد. شیر در دو مرحله بطور خطی بسته می‌شود که در مرحله اول، ۹۰ درصد شیر در مدت ۵ ثانیه و در مرحله دوم ۱۰ درصد باقی مانده در مدت ۱۰ ثانیه بسته می‌شود. لوله‌های ۱ تا ۳ به ترتیب دارای طول‌های ۲۶۰، ۳۴۰، ۴۰۰ متر و قطرهای ۰/۷۵، ۰/۶۱، ۰/۵۱ متر و نیز سرعت موج‌های ۸۵۰ و ۹۶۰ متر بر ثانیه می‌باشند. ضمناً محل اتصال لوله‌های ۱ به ۲ و ۲ به ۳ در تراز ۳۶۸ و ۳۸۷ متر قرار دارد.

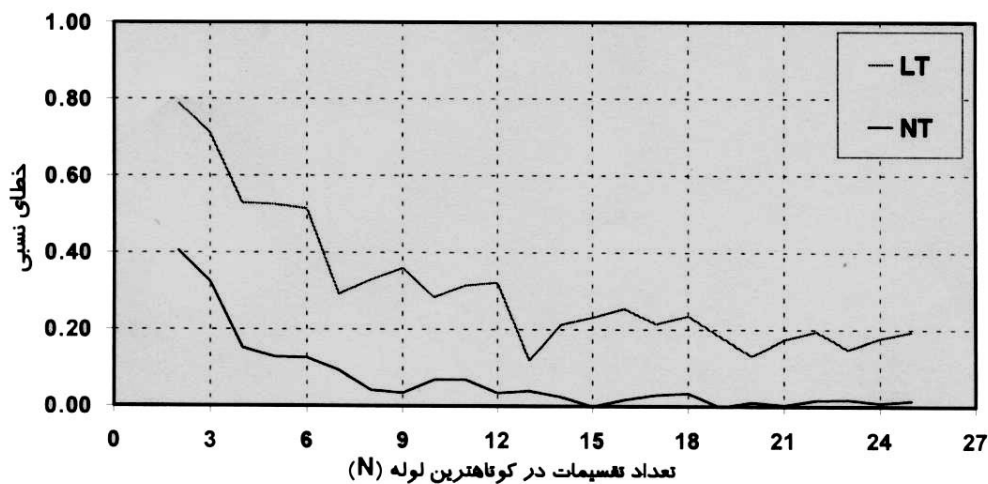
جدول ۱: مشخصات افت در شیر

درصد بازشدگی	۱۰۰	۹۰	۸۰	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	۰
KL	۰/۱۹	۰/۴۰	۰/۸۰	۱/۶۰	۳	۵/۵۹	۱۰	۱۷/۹۹	۳۱/۹۵	۵۹/۸۸	بی نهایت

در ادامه با ساختن فایل ورودی برنامه رایانه‌ای براساس مسئله کاربردی و اجرای برنامه برای گام‌های زمانی (تعداد تقسیمات در کوتاهترین لوله (N)) مختلف، می‌توان بارهای فشاری حداکثر و حداقل را برای هر N بدست آورد و بروی پروفیل خط لوله رسم کرد. در شکل ۴ مشاهده می‌گردد که هر دو روش در $N = 149$ یک جواب واحد را ارائه می‌کنند. دلیل این امر آن است که در $N = 149$ عدد کورانت در لوله‌ها به عدد یک بسیار نزدیک شده در نتیجه خطاهای ناشی از درونیابی به صفر میل می‌کند. نظر به اینکه در $N = 149$ بارهای فشاری اکسترمم در هر دو روش درونیابی یکسان می‌باشد و با فرض اینکه مجموع مساحت‌های محصور میان بارهای فشاری نظیر ناشی از $N = 1$ و $N = 149$ بر روی پروفیل خط لوله عدد بدون بعد یک باشد، می‌توان برای هر $N \geq 2$ ، یک عدد بدون بعد کوچکتر از یک که معرف مجموع مساحت‌های مابین بارهای فشاری نظیر ناشی از هر N و $N = 149$ می‌باشد، بدست آورد. در شکل ۵ تغییرات این عدد بدون بعد که معیاری از دقت یا خطای نسبی محاسبات می‌باشد، در برابر تغییرات N برای هر یک از روش‌ها رسم شده است.

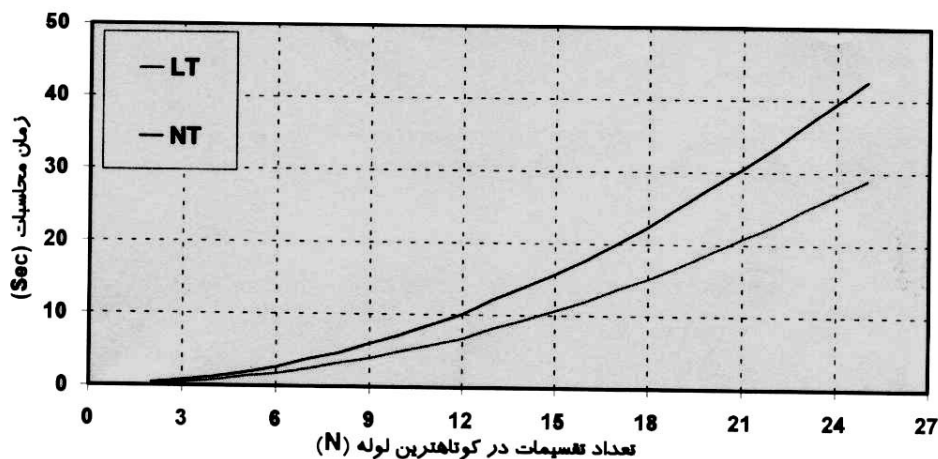


شکل ۴: بارهای فشاری یکسان در روش‌های درونیایی خطی و اسپلین درجه سه



شکل ۵: مقایسه خطای نسبی در روش‌های درونیایی خطی و اسپلین درجه سه

با توجه به شکل ۵ مشاهده می‌شود که روش درونیایی اسپلین درجه سه نسبت به روش درونیایی خطی دارای سه برتری مهم می‌باشد. این برتری‌ها شامل دقت بیشتر در تعداد تقسیمات (N) نظیر، نوسان کمتر و همگرایی سریعتر به جواب نهایی، می‌باشد. تنها نقطه ضعف درونیایی اسپلین درجه سه، زمان پردازش آن در هر N، نسبت به درونیایی خطی می‌باشد (شکل ۶)، که این نقطه ضعف در برابر مزایای آن قابل اغماض است. به عنوان مثال در $N=15$ ، زمان پردازش درونیایی اسپلین که خطای نسبی تقریباً صفر را دارا می‌باشد در برابر خطای نسبی ۲۳ درصدی درونیایی خطی قابل قبول می‌باشد.



شکل ۶: مقایسه زمان پردازش در روش‌های درونیابی خطی و اسپلاین درجه سه،

۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق نشان داده شد که در گام زمانی یکسان، درونیابی پیشنهادی اسپلاین درجه سه روی خط زمانی دقت بالاتری نسبت به درونیابی خطی روی خط زمانی در تحلیل پدیده ضربه قوچ (میراثی جریان) دارد. این توانایی در تحلیل میراثی‌های تند و نیز میراثی در شبکه‌ها نمود بیشتری خواهد داشت، زیرا در این موارد برای تحلیل دقیق‌تر لازم است که گام زمانی کوچکتری اختیار شود.

۸- مراجع

- [۱] تائبی، ا. و چمنی، م. ر، شبکه‌های توزیع آب شهری، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۹.
- [2] Larock, B. E., Jeppson, R. W., and Watters, G. Z., "Hydraulic of Pipeline Systems", CRC Press LLC, 2000.
- [3] Goldberg, D. E., and Wylie, E. B., "Characteristics Method Using Time-Line Interpolations", *J. Hydr. Div., ASCE*, 109(5), 1983, 6701-683.
- [4] Streeter, V.L., and Lai, C., "Water Hammer Analysis Including Fluid Friction", *J. Hydr. Div., ASCE*, 88(3), 1962, 79-112.
- [5] Streeter, V. L., "Valve Stroking for Complex Piping System", *J. Hydr. Div., ASCE*, 93(HY3), 1964, 81-98.
- [6] Sibetheros, I. A., Holley, E. R., and Branski, J. M. "Spline Interpolation for Water Hammer Analysis", *J. Hydr. Engrg., ASCE*, 117(10), 1991, 1332-1369.
- [۷] رستمی، علیرضا، "بررسی دینامیکی جریان ناماندگار در لوله‌های تحت فشار از طریق مدل‌های تحلیلی و عددی - ضربه قوچ"، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۹.
- [8] Karney, B. W., and Ghidaoui, M. S., "Flexible Discretization Algorithm for Fixed-Grid MOC in Pipelines", *J. Hydr. Engrg., ASCE*, 123(11), 1997, 1004-1011.