

فصل ۳

رابطه‌های انتگرالی جریان سیال

به‌طور کلی می‌توان گفت که علم مکانیک سیالات شامل دو بخش اصلی استاتیک و دینامیک سیال است. فصل قبل اختصاص به استاتیک سیال داشت و سیال در حال سکون بررسی گردید. اما، همان‌طور که از تعریف سیال برمی‌آید، سیال همیشه تمایل به حرکت دارد. تنش‌های برشی و یا فشاری باعث حرکت سیال می‌شوند. در این فصل مفاهیم مورد نیاز برای تحلیل حرکت سیال ارائه می‌گردد.

ابتدای این فصل اختصاص به تعاریفی از سینماتیک سیال دارد. در حقیقت سینماتیک سیال مفاهیم حرکت سیال را بدون توجه به نیروهای وارده بر سیال بررسی می‌کند. اگرچه در این فصل مفهوم انتگرالی حرکت سیال بررسی می‌شود، اما از معادلات دیفرانسیلی برای بیان تغییرات زمانی سینماتیک سیال استفاده می‌شود. در اینجا، مفهوم جدیدی به‌نام حجم کنترل برای تحلیل حرکت سیال در نظر گرفته می‌شود و ارتباط آن با سیستم، توسط نظریه‌ی انتقال رینولدز بیان خواهد گردید. سپس، معادلات اساسی حرکت سیال در فرم انتگرالی بیان می‌گردد. این معادلات شامل رابطه‌ی بقای جرم، رابطه‌ی اندازه حرکت و رابطه‌ی انرژی است. در بیشتر حالت‌های مورد بررسی، سیال تراکم‌ناپذیر مورد توجه است. نیروهای در نظر گرفته شده در حرکت سیال شامل نیروهای سطحی و نیروهای داخلی خواهد بود. از آنجایی که در سرتاسر این فصل از انتگرال سخن به‌میان می‌آید، به خوانندگان اکیداً توصیه می‌شود مطالب درس ریاضی ۱ دانشگاهی را مرور کنند.

۱-۳ سینماتیک و مفاهیم سیال

۱-۱-۳ دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری

برای تحلیل مسایل در مکانیک سیالات دو دیدگاه وجود دارد. با توجه به اینکه سیال از مولکول‌های بسیاری تشکیل شده است، امکان بررسی حرکت تک‌تک مولکول‌ها وجود ندارد. در عوض، از تعداد متوسطی از مولکول‌ها که حجم بسیار کوچکی دارند استفاده می‌گردد. این حجم که ذره سیال^۱ نامیده می‌شود، در مقایسه با قلمروی مکانی مورد مطالعه کوچک است، اما در مقایسه با فاصله‌ی مولکولی سیال بزرگ است. لذا، خواص سیال (از قبیل تنش، فشار، چگالی و غیره) را می‌توان با بیان خواص تک‌تک ذرات آن نسبت به زمان تعیین کرد. از طرفی دیگر، می‌توان گفت که خصوصیات سیال در تمام قلمروی مکانی به صورت پیوسته تغییر می‌کند و سیال به عنوان یک ماده‌ی پیوسته در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که این مفهوم در تمام موارد بررسی حرکت سیال صادق است، در یک زمان معین می‌توان خواص سیال را نسبت به موقعیت مکانی آن بیان کرد. این روش بیان خصوصیات سیال به روش توصیف قلمروی^۲ مکانی سیال معروف است.

در دیدگاه لاگرانژی^۳، مانند آنچه که در درس فیزیک با آن آشنا شده‌اید، به تعقیب ذرات سیال در حال حرکت پرداخته می‌شود و تغییرات خواص سیال در ارتباط با این ذرات نسبت به زمان بررسی می‌شود. در دیدگاه اویلری^۴، از مفهوم توصیف قلمروی مکانی استفاده می‌شود. در این دیدگاه، خواص سیال در نقاط معینی که در قلمروی سیال قرار دارند بررسی خواهد شد. در حقیقت، در اینجا خواص ذرات سیال هنگامی که از نقاط مختلف می‌گذرند، قابل بررسی است.

برای درک بهتر تفاوت این دو دیدگاه به مثال ارایه شده در شکل (۱-۳) توجه کنید. در این مثال، خروج آب از یک شیر در نظر گرفته شده است و اندازه‌گیری مقدار سرعت سیال بعد از خارج شدن از شیر مورد نظر است. در دیدگاه اویلری، در نقطه‌ای مانند A با مختصات x_1 و y_1 ، دستگاه اندازه‌گیری سرعت نصب می‌شود و مقادیر سرعت نسبت به زمان در این نقطه یادداشت می‌شود. بنابراین، می‌توان سرعت سیال، V ، در آن نقطه را نسبت به زمان تعیین کرد. به عبارتی دیگر، سرعت در نقطه‌ی A تابع x_1 ، y_1 و t خواهد بود. در این دیدگاه چنانچه تعداد بسیاری از این دستگاه‌ها در نقاط مختلف قلمروی مکانی نصب شود، می‌توان سرعت سیال در تمام قلمروی آن، یا به عبارت دیگر $V = V(x, y, t)$ را به دست آورد.

در دیدگاه لاگرانژی، دستگاه اندازه‌گیری سرعت به یک ذره سیال (برای مثال ذره‌ی O) نصب می‌شود و سرعت ذره در زمان‌های مختلف ثبت می‌گردد، $V_O = V_O(t)$. با نصب بسیاری از این دستگاه‌ها که با ذرات سیال حرکت می‌کنند، می‌توان سرعت این ذرات را نسبت به زمان تعیین کرد. لذا، مقدار سرعت در تمام ذرات مربوط به قلمروی سیال مشخص خواهد گردید. در نتیجه، سرعت یک نقطه هنگامی معلوم است که موقعیت هر ذره‌ای که از آن نقطه نسبت به زمان می‌گذرد، معلوم باشد.

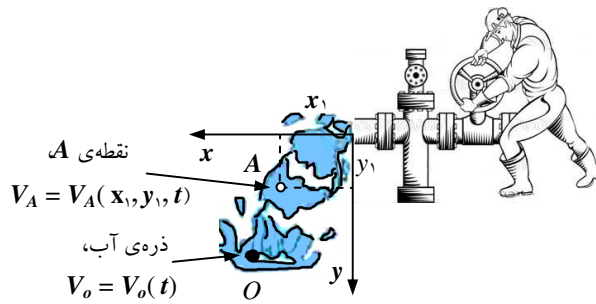


۱- Fluid particle

۲- Field representation

۳- Lagrangian approach

۴- Eulerian approach



شکل ۱-۳ توصیف دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری برای سرعت آب خروجی از یک شیر.



معرفی یک دانشمند

لئونارد اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳)

این دانشمند در شهر بازل در کشور سوئیس به دنیا آمد. او یک ریاضی‌دان و فیزیک‌دان بود. پدر او یک روحانی بود که به ریاضی علاقه داشت. لئونارد در سال ۱۷۲۰ در رشته‌ی هنر در دانشگاه بازل به تحصیل مشغول شد. یکی از اساتید

دانشگاه به نام جووان برنولی (پدر دنیل برنولی معروف)، به وی در بعدازظهر روزهای شنبه تدریس خصوصی ریاضی می‌داد. در اینجا بود که اویلر با دنیل برنولی آشنا گردید. سپس، وی وارد دانشکده‌ی الهیات گردید. اگرچه وی هیچ‌وقت روحانی نشد، اما همیشه آدمی مذهبی باقی ماند. اویلر در فعالیت‌های مختلفی در زمینه‌های ریاضی و فیزیک شرکت داشت. او علاوه بر معرفی دیدگاه خود برای بررسی حرکت سیال، رابطه‌ای تحلیلی به نام معادلات اویلر و معادلات فشار در یک نقطه را در مکانیک سیالات به دست آورد. اویلر به بررسی بعضی مسایل عملی، از آن جمله ارتعاش هوا در لوله و تئوری توربین‌های آبی نیز پرداخت. متأسفانه اویلر در اواخر عمر خود به یک نوع بیماری مبتلا شد که باعث کوری هر دو چشم وی گردید.

اگر در دیدگاه‌های لاگرانژی و یا اویلری سرعت کلیه‌ی ذرات و یا کلیه‌ی نقاط در قلمروی سیال معلوم باشد، در آن صورت **قلمروی سرعت**^۱ سیال معلوم خواهد شد. اگرچه در بعضی موارد، استفاده از دیدگاه لاگرانژی مفیدتر است، اما در اکثر موارد از دیدگاه اویلری برای تحلیل مسایل استفاده می‌شود.

۱-۲-۳ سرعت و شتاب

بارزترین مشخصه‌ی سیال در حال حرکت، سرعت آن است. قلمروی سرعت سیال در دستگاه **مختصات کارتزین**^۲ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k} \quad (۱-۳)$$

که در آن u ، v و w به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت‌های x ، y و z هستند.

۱- Velocity field

۲- Cartesian coordinates

بنا بر تعریف، شتاب برابر با نرخ زمانی سرعت ذره است. بنابراین، **قلمروی شتاب**^۱ در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (۲-۳)$$

برای بسط رابطه‌ی (۲-۳) از قانون زنجیره‌ای مشتق به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (۳-۳)$$

در رابطه‌ی (۳-۳)، ∂ عامل مشتق جزئی^۲ و d عامل مشتق کل^۳ است. در ترم‌های دوم الی چهارم سمت راست رابطه‌ی (۳-۳)، مقادیر تغییر مکان در جهت‌های مختلف نسبت به زمان وجود دارد و به ترتیب برابر مؤلفه‌های سرعت در جهت‌های x ، y و z هستند. لذا، رابطه‌ی (۳-۳) چنین نوشته می‌شود:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (۴-۳)$$

که در آن \vec{V} عملگر گرادینان است که در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (۵-۳)$$

رابطه‌ی (۶-۳) یک رابطه‌ی برداری است که مؤلفه‌های آن در جهات مختلف به صورت زیر است:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (۶-۳)$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (۷-۳)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۸-۳)$$

که در آن a_x ، a_y و a_z به ترتیب مؤلفه‌های شتاب در جهات x ، y و z هستند.

ترم اول سمت راست رابطه‌ی (۴-۳)، $\partial \vec{V} / \partial t$ ، **شتاب محلی**^۴ یا به عبارت دیگر، شتاب در مکان مورد مطالعه است. این ترم تغییرات سرعت را نسبت به زمان (بدون توجه به مختصات آن) نشان می‌دهد. ترم دوم، $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ ، **شتاب انتقالی**^۵ نامیده می‌شود و تغییرات بردار سرعت را از مکانی به مکان دیگر بیان می‌کند. رابطه‌های سرعت و شتاب در **مختصات استوانه‌ای**^۶ در پیوست داده شده است.



ک ۲-۳

مثال ۳-۱: محاسبه‌ی شتاب ذره با استفاده از قلمروی سرعت.

قلمروی سرعت در یک سیال به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{V} = (6 + xy + t^2) \hat{i} - (2xy + 8t) \hat{j} + 25z \hat{k}$$

۱- Acceleration field

۲- Partial derivative

۳- Total derivative

۴- Local acceleration

۵- Transport acceleration

۶- Cylindrical coordinates

مقدار شتاب ذره‌ی سیال را در نقطه‌ی M به مختصات $(۳, ۰, ۲)m$ در زمان $t = ۱ s$ به دست آورید.

پاسخ:

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۴) و داده‌های مسأله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= 2t\hat{i} - 8\hat{j} \quad ; \quad u = 6 + xy + t^2 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = y\hat{i} - 2y\hat{j} \quad ; \quad v = -(2xy + 8t) \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} &= x\hat{i} - 2x\hat{j} \quad ; \quad w = 25z \quad ; \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 25\hat{k} \\ \vec{a} &= (2t\hat{i} - 8\hat{j}) + (6 + xy + t^2)(y\hat{i} - 2y\hat{j}) - (2xy + 8t)(x\hat{i} - 2x\hat{j}) + (25z)(25\hat{k}) \end{aligned}$$

شتاب ذره در نقطه‌ی M به مختصات $(۳, ۰, ۲)m$ در زمان $t = ۱ s$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= [2(1s)\hat{i} - 8\hat{j}] + [6 + 0 + (1s)^2](0) - [0 + 8(1s)][(3m)\hat{i} - 2(3m)\hat{j}] \\ &\quad + [25(2m)](25\hat{k}) = \underline{\underline{-22\hat{i} + 40\hat{j} + 1250\hat{k} \text{ m/s}^2}} \end{aligned}$$

مسائل ۱-۳
الی ۵-۳

۳-۱-۳ دبی و سرعت متوسط

در این قسمت از متغیری که در تشخیص مقدار جریان سیال موثر است، سخن به میان می‌آید. مقدار سیالی که در واحد زمان از سطح مقطع جریان^۱ عبور می‌کند، دبی^۲ جریان نامیده می‌شود. اگر این مقدار عبوری جرم سیال باشد، آن را دبی جرمی^۳ می‌نامند و آن را با علامت \dot{m} نشان می‌دهند. بعد دبی جرمی MT^{-1} و واحد آن در سیستم متریک kg/s است. اگر مقدار عبوری حجم سیال باشد، آن را دبی حجمی^۴ یا به اختصار، دبی می‌نامند. دبی حجمی را با علامت Q نشان می‌دهند. بعد دبی حجمی L^3/T و واحد آن در سیستم متریک m^3/s است.

برای محاسبه‌ی دبی، شکل (۳-۲) را در نظر بگیرید که در آن سطح مقطع جریان A نشان داده شده است. چون سرعت سیال عبوری از سطح مقطع می‌تواند غیریکنواخت باشد، المان δA را در نظر بگیرید که سرعت در آن \vec{v} است. سرعت بردار عبوری از المان δA است و نباید آن را با سرعت v که در بخش پیشین به آن اشاره شد و مؤلفه‌ی بردار سرعت در راستای محور y است یکسان در نظر گرفت. دبی جرمی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta \dot{m} = \frac{m}{t} = \frac{\rho \delta \forall}{t} = \rho(\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A \quad (۳-۹)$$

که در آن چگالی سیال، ρ حجم سیال عبوری از سطح مقطع δA در مدت زمان t و \hat{n} بردار یکه‌ی سطح المان δA است. توجه داشته باشید که حاصل ضرب اسکالر $(\vec{v} \cdot \hat{n})$ برابر با مؤلفه‌ی بردار سرعت در

۱ - Flow cross-section

۲ - Discharge (or Flowrate)

۳ - Mass flowrate

۴ - Volumetric flowrate

راستای بردار یکه‌ی (v_n) است. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۹-۳) مقدار دبی جرمی به دست می‌آید:

$$\dot{m} = \int_A \rho(\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \int_A \rho v_n dA \quad (10-3)$$

همچنین، مقدار دبی حجمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q = \int_A (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \int_A v_n dA \quad (11-3)$$

برای سیال تراکم‌ناپذیر، مقدار چگالی ثابت است، ولی برای سیال تراکم‌پذیر، توزیع چگالی از مقطعی به مقطع دیگر تغییر می‌کند، اما چگالی در هر مقطع ثابت در نظر گرفته می‌شود. بنا بر تعریف، **سرعت متوسط^۱** فرضی است که مقدار دبی به دست آمده از آن با دبی سرعت واقعی سیال برابر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

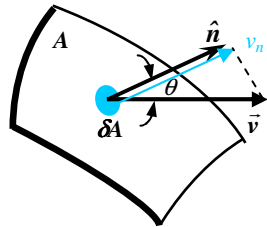
$$\dot{m} = \rho \bar{V} A = \int_A \rho(\vec{v} \cdot \hat{n}) dA \quad (12-3)$$

$$\bar{V} = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{\int_A \rho(\vec{v} \cdot \hat{n}) dA}{\rho A} = \frac{\int_A \rho v_n dA}{\rho A} \quad (13-3)$$

اگر توزیع سرعت یکنواخت باشد، مقدار دبی جرمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{m} = \rho Q = \rho \bar{V} A \quad (14-3)$$

رابطه‌های (۱۲-۳) و (۱۴-۳) مشابه یکدیگر است. در رابطه‌ی (۱۲-۳) از سرعت متوسط فرضی در یک مقطع جریان استفاده شده است، در حالی که در رابطه‌ی (۱۴-۳) توزیع سرعت در مقطع جریان، یکنواخت فرض شده است. علامت $-$ بالای متغیر سرعت، نماد سرعت متوسط است.

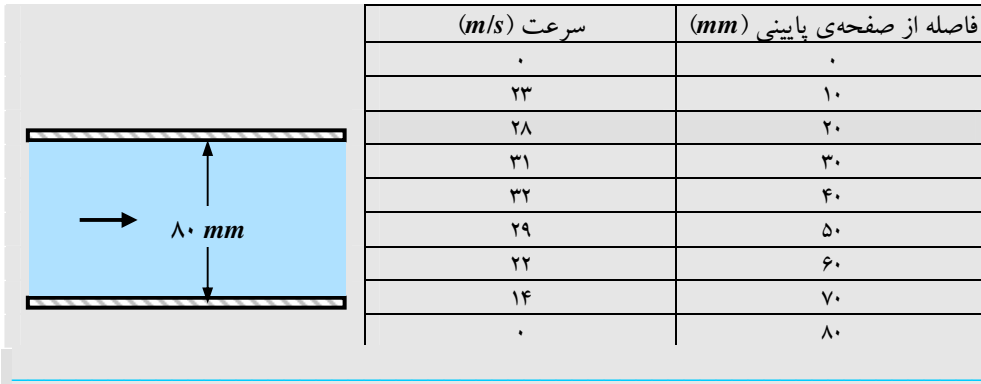


شکل ۲-۳ دبی سیال که از سطح مقطع جریان A عبور می‌کند.

مثال ۲-۳: محاسبه‌ی سرعت متوسط جریان.

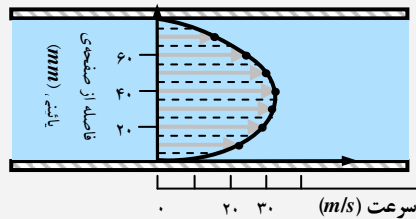
هوا بین دو صفحه‌ی موازی با عرض b که در فاصله‌ی ۸۰ میلی‌متر از یکدیگر قرار دارند در جریان است. مقادیر سرعت اندازه‌گیری شده در یک مقطع جریان در فاصله‌های مختلف از صفحه‌ی پایینی در جدول صفحه‌ی بعد داده شده است. توزیع سرعت را رسم کرده و مقدار سرعت متوسط را به دست آورید.

۱- Average velocity



پاسخ:

برای رسم توزیع سرعت، ابتدا با انتخاب دستگاه مختصات که محور عمودی آن فاصله و محور افقی آن سرعت هوا است، مقادیر سرعت رسم می‌گردد. سپس، یک منحنی از این نقاط عبور داده می‌شود.



برای توزیع سرعت رابطه‌ای داده نشده است، لذا در محاسبات به جای انتگرال گیری، از مجموع استفاده می‌شود. با نگاهی به رابطه‌ی (۳-۱۲) می‌توان دریافت که دبی جرمی جریان برابر سطح محصور بین منحنی

توزیع سرعت و محور فاصله، ضرب در عرض صفحه و سپس ضرب در چگالی سیال است. برای محاسبه‌ی مساحت، از نقاط میانه‌ی سرعت (v_m) که با خط چین نشان داده شده است استفاده می‌شود. با اختصاص نوارهایی به ارتفاع ۱۰ میلی‌متر به هر کدام از نقاط میانه و حاصل ضرب سرعت میانه‌ی هر نقطه در ارتفاع (۱۰ mm) و عرض صفحه (b)، مجموع آنها را که دبی حجمی است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{V} = \frac{\int \rho(\vec{v} \cdot \hat{n}) dA}{\rho A} = \frac{\int (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA}{A} = \frac{\sum v_m [(b)(10 \text{ mm})]}{(b)(80 \text{ mm})} = \frac{\sum_{m=1}^8 v_m}{8}$$

$$\bar{V} = \frac{(17.5 + 26.0 + 29.6 + 31.9 + 30.7 + 25.4 + 18.1 + 7.7) \text{ m/s}}{8} = \underline{\underline{23.4 \text{ m/s}}}$$

مسائل ۳-۶
الی ۳-۱۶

۲-۳ سیستم و حجم کنترل

سیال ماده‌ای است که به آسانی حرکت می‌کند و همچنین ذرات تشکیل دهنده‌ی سیال در اثر نیروی برشی، نسبت به هم جابه‌جا می‌شوند. در بخش (۳-۱-۱) دو دیدگاه متفاوت برای بیان توزیع سرعت در مقطع جریان بیان شد که در آن برای به دست آوردن سرعت ذره از مختصات نقطه استفاده شد، و یا به تعقیب یک ذره پرداخته شد.

برای تعیین ویژگی‌های سیال از قانون‌های فیزیکی نظیر قانون‌های بقای جرم، اندازه حرکت و انرژی

می‌توان استفاده کرد که برای سیستم سیال صادق است. بنا بر تعریف، سیستم^۱ مجموعه‌ای از ماده با مقدار ثابت (با تعداد اتم یا ذرات سیال ثابت) است که می‌تواند جابه‌جا شود، یا اینکه حرکت کند. به کاربردن مفهوم سیستم برای جامدات به راحتی صورت می‌گیرد، ولی شکل و اندازه‌ی یک سیستم سیال ممکن است تغییر کند و یا اینکه سیستم متحرک باشد. با توجه به این موضوع، مولکول‌ها یا ذرات تشکیل‌دهنده‌ی یک جسم جامد در هنگام حرکت نسبت به هم جابه‌جایی ندارند، ولی در سیال این جابه‌جایی صورت می‌گیرد. همان‌طور که در فصل اول بیان شد، در سیالات، نیروی برشی باعث حرکت نسبی لایه‌های مختلف سیال شده و ذرات سیال با سرعت‌های متفاوت نسبت به هم حرکت می‌کنند. برای مثال، سیستمی از هوا را در نظر بگیرید که به داخل یک کمپرسور کشیده می‌شود. این سیستم هوا در داخل کمپرسور به علت فشرده‌شدن، تغییر شکل و اندازه می‌دهد و حتی درجه حرارت آن نیز تغییر می‌کند. درحقیقت، تعقیب ذرات تشکیل‌دهنده‌ی این مقدار سیستم کاری بسیار مشکل است، زیرا در هر لحظه ممکن است شکل خاصی داشته باشند. لذا، کاربرد دیدگاه لاگرانژی در مکانیک سیالات کاری دشوار و پیچیده است.

در سیالات برای کاربرد دیدگاه اولیری از مفهوم حجم کنترل استفاده می‌شود. **حجم کنترل**^۲ (CV) شکلی اختیاری در فضا است. حجم کنترل شامل تعدادی از نقاط ثابت در قلمروی سیال است که شکل خاصی دارد. برای یک مسأله‌ی خاص می‌توان حجم کنترل‌های متفاوتی انتخاب کرد. هیچ‌گونه قانون خاصی برای انتخاب شکل خاصی از حجم کنترل وجود ندارد، اما شکلی انتخاب می‌شود که تحلیل مسأله را آسان‌تر کند. برای مثال، اگر بخواهیم خروج آب را از یک روزنه بررسی کنیم، بهتر است شکل انتهایی روزنه به عنوان حجم کنترل انتخاب شود. چون سیال هنگام حرکت وارد حجم کنترل یا از آن خارج می‌شود، مقدار ویژگی یک حجم کنترل می‌تواند نسبت به زمان تغییر کند. سطوح تشکیل‌دهنده‌ی یک حجم کنترل **سطوح کنترل**^۳ (CS) نامیده می‌شود.

انواع حجم کنترل در شکل (۳-۳) با خط‌چین خاکستری نشان داده شده است. در شکل (۳-۳-الف)، **حجم کنترل ثابت**^۴ (برای مثال، پرشدن یک مخزن) نشان داده شده است. جریان آب از سطح بالایی حجم کنترل وارد آن می‌شود، درحالی‌که دیگر سطوح کنترل با سطوح مخزن یکی است و هیچ جریانی از آن عبور نمی‌کند. مقدار ویژگی‌های سیال داخل این حجم کنترل، از جمله جرم آن، نسبت به زمان تغییر می‌کند. **حجم کنترل متحرک**^۵ در شکل (۳-۳-ب)، برای مثال، شامل موتور هواپیمای در حال پرواز است. این حجم کنترل نسبت به ناظری که در روی کره‌ی زمین قرار دارد، حجم کنترل متحرک است، اما نسبت به ناظر واقع در هواپیما ثابت است. هنگام حرکت هواپیما، هوا از سطح جلویی وارد حجم کنترل می‌گردد و از سطح عقبی، گاز حاصل از احتراق خارج خواهد شد. البته از سطح جانبی موتور نیز، مقداری سوخت وارد حجم کنترل می‌گردد. در شکل (۳-۳-ج)، **حجم کنترل شکل‌پذیر**^۶

۱- System

۲- Control volume

۳- Control surfaces

۴- Fixed control volume

۵- Moving control volume ۶- Deforming control volume

شامل یک تایلر ماشین است که در حال پنچر شدن است. با گذشت زمان ابعاد تایلر کاهش می‌یابد و حجم آن کم می‌شود. در بعضی موارد، ترکیبی از حالات فوق نیز حاصل می‌شود. برای مثال، تایلر ماشین متحرکی را در نظر بگیرید که در حال پنچر شدن است. اگر حجم کنترل را تایلر در نظر بگیریم، به مرور زمان حجم آن کاهش می‌یابد (حجم کنترل شکل‌پذیر) و در حال حرکت (حجم کنترل متحرک) است. اکثر مثال‌هایی که در این کتاب ارایه می‌شود، مربوط به حجم کنترل ثابت است. با وجود این، کاربرد حجم کنترل متحرک و یا شکل‌پذیر نیز ارایه خواهد شد.

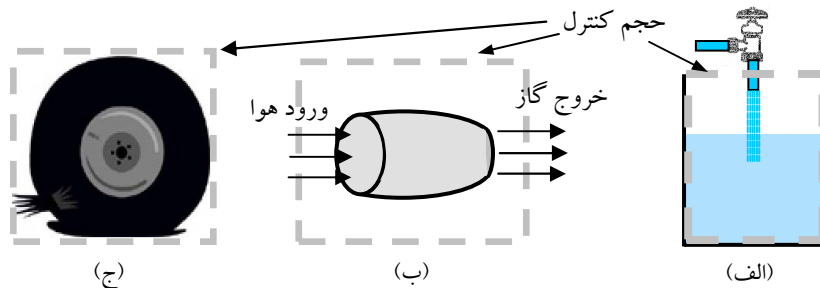
مشکل اساسی در به‌کاربردن مفهوم حجم کنترل این است که هیچ قانون فیزیکی برای این پدیده وجود ندارد. همان‌طور که اشاره شد کلیه‌ی قانون‌های فیزیک (بقای جرم، اندازه حرکت و غیره) برای سیستم اعتبار دارد. برای به‌کاربردن قانون‌های فیزیک در حجم کنترل باید فرضیه‌ای استوار گردد که این کار توسط دانشمندی به نام آزرین رینولدز^۱ ارایه گردید.

۳-۳ رابطه‌ی انتگرالی نظریه‌ی انتقال رینولدز

همان‌طور که اشاره گردید، قوانین اساسی دینامیک برای سیستم تعریف شده‌اند، در حالی که هیچ قانونی برای حجم کنترل وجود ندارد. چون در مکانیک سیالات کار کردن با حجم کنترل آسان‌تر است، لازم است که رابطه‌ای بین تغییرات هر خاصیت در حجم کنترل با تغییرات سیستم ارایه شود. این کار اولین بار توسط رینولدز تحت عنوان نظریه‌ی انتقال رینولدز^۲ ارایه گردید. در اینجا، ابتدا تعاریف پایه‌ی نظریه ارایه می‌شود و سپس به اثبات آن نظریه پرداخته می‌شود.

فرض کنید که متغیر B نشان‌دهنده‌ی ویژگی سیال و b مقدار همان ویژگی در واحد جرم باشد، به طوری که $B = mb = \rho \forall b$ و m مقدار جرم باشد. متغیر B را متغیر جامع^۳ و b را متغیر متمرکز^۴ می‌نامند. به عنوان مثال، اگر $B = m V^2/2$ (اندازه حرکت) باشد، $b = V^2/2$ خواهد بود. متغیر B می‌تواند اسکالر و یا بردار باشد. اگر توزیع b در یک سیستم یکنواخت نباشد، مقدار B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B = \int \rho b d\forall \quad (15-3)$$



شکل ۳-۳ انواع حجم کنترل؛ الف) حجم کنترل ثابت، ب) حجم کنترل متحرک، ج) حجم کنترل شکل‌پذیر.

۱- Osborne Reynolds ۲- Reynolds transport theorem ۳- Extensive parameter ۴- Intensive parameter



معرفی یک دانشمند

آزبن رینولدز (۱۸۴۲-۱۹۱۲)

این دانشمند در شهر بلفاست کشور ایرلند چشم به جهان گشود و اندکی بعد به اتفاق خانواده‌اش به انگلستان مهاجرت کرد. اگرچه پدر وی یک روحانی بود، رینولدز علاقه‌ی مفروطی به علوم ریاضی و مکانیک داشت. وی پس از فارغ‌التحصیلی از دانشگاه کمبریج، توانست دومین کرسی استادی را در رشته‌ی مهندسی که در انگلستان اعطا شده بود در دانشگاه اونز (منچستر فعلی) به‌دست آورد. او در سال‌های اولیه‌ی تحقیق به علت عدم وجود آزمایشگاه در دانشگاه، کارهای عملی را در منزل انجام می‌داد. وی در عمر خود بیش از ۷۰ مقاله نوشت که هنوز تعدادی از آنها اعتبار علمی ویژه‌ای دارد و به‌صورت فایل دیجیتال در اینترنت موجود است. بسیاری از مفاهیم و نظریه‌ها در سیالات از قبیل عدد رینولدز، شبیه‌سازی رینولدز، تنش‌های رینولدز، نظریه‌ی انتقال رینولدز و بسیاری دیگر از جمله نوآوری‌های رینولدز است. وی در سال ۱۹۰۵ به علت حمله‌ی قلبی بازنشسته گردید.

۳-۱ اثبات رابطه

برای اثبات نظریه، قلمروی سیالی را در نظر بگیرید که قلمروی سرعت آن از سمت چپ به راست است، شکل (۳-۴ الف). در این قلمروی سیال، حجم کنترل ثابتی را در زمان t در نظر بگیرید که با رنگ آبی نشان داده شده است. از سطوح این حجم کنترل مقداری از سیال عبور کرده یا در آن ذخیره می‌گردد. همان‌طور که گفته شد، جرم سیال داخل حجم کنترل نسبت به زمان ثابت نیست. در زمان t می‌توان تصور کرد سیستمی وجود دارد که شکل آن در این زمان شبیه شکل حجم کنترل است. این سیستم ممکن است در زمان‌های قبل و یا بعد شکل متفاوتی را داشته باشد. حال همین سیستم را در فاصله زمانی δt یا به عبارت دیگر، در زمان بعدی $t + \delta t$ در نظر بگیرید. چون سیال در حال حرکت است، سیستم به سمت راست جابه‌جا شده و حتی ممکن است شکل آن نیز تغییر کند.

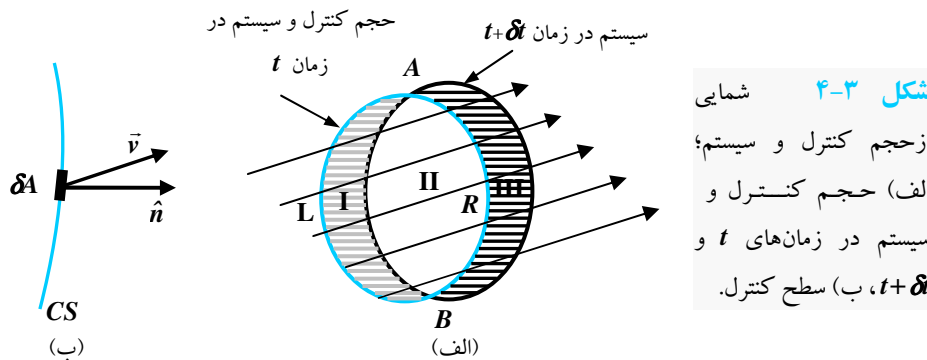
حال می‌خواهیم تغییرات زمانی متغیر جامع B از سیال (مانند جرم، اندازه حرکت، انرژی و غیره) را در سیستم و حجم کنترل بررسی کنیم. برای این کار، سیستم در زمان‌های t و $t + \delta t$ به سه ناحیه‌ی I، II و III تقسیم شده است. ناحیه‌های I و II شامل سیستم (یا حجم کنترل) در زمان t و ناحیه‌های II و III شامل سیستم در زمان $t + \delta t$ است. مقدار تغییرات متغیر B در سیستم نسبت به زمان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{B_{\text{system}_{t+\delta t}} - B_{\text{system}_t}}{\delta t} = \frac{\left(\int_{III} \rho b d\forall + \int_{II} \rho b d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{\left(\int_{II} \rho b d\forall + \int_{I} \rho b d\forall \right)_t}{\delta t} \quad (۱۶-۳)$$

$$\frac{B_{system_{t+\delta t}} - B_{system_t}}{\delta t} = \frac{\left(\int_{II} \rho b d\forall \right)_{t+\delta t} - \left(\int_{II} \rho b d\forall \right)_t}{\delta t} + \frac{\left(\int_{III} \rho b d\forall \right)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{\left(\int_{I} \rho b d\forall \right)_t}{\delta t} \quad (17-3)$$

با اعمال اپراتور حد در رابطه‌ی (۱۷-۳)، رابطه‌ی کلی برای سیستم حاصل می‌شود. عبارت سمت چپ رابطه‌ی (۱۷-۳) برابر تغییرات زمانی متغیر B نسبت به زمان است و حد آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{B_{system_{t+\delta t}} - B_{system_t}}{\delta t} \right] = \frac{dB_{sys}}{dt} \quad (18-3)$$



برای حد عبارت سمت راست رابطه‌ی (۱۷-۳)، هر کدام از عبارت‌ها جداگانه در نظر گرفته می‌شود. کسر اول، رابطه‌ی تغییرات متغیر B نسبت به زمان در حجم کنترل است و حد آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{II} \rho b d\forall \right)_{t+\delta t} - \left(\int_{II} \rho b d\forall \right)_t}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b d\forall \quad (19-3)$$

در زمان $\delta t \rightarrow 0$ حجم کنترل ثابت است، لذا در رابطه‌ی فوق مشتق جزئی به کار رفته است. کسر دوم مقدار متغیر B است که در فاصله زمانی δt از قسمتی از سطح کنترل عبور کرده که مرز آن در شکل (۳-۴-الف) به طور شماتیک با ARB نشان داده شده است. در حد، این مقدار برابر با تغییرات متغیر B است که از طریق سطح کنترل از حجم کنترل خارج شده است. به همین دلیل، کسر سوم برابر با مقدار متغیر B است که در همین فاصله زمانی از طریق سطح کنترل ALB وارد حجم کنترل شده است.

تفاوت این دو کسر نرخ زمانی خالص^۱ جریان گذرنده‌ی متغیر B از سطوح حجم کنترل را نشان می‌دهد. برای به‌دست آوردن رابطه‌ای برای نرخ زمانی خالص جریان گذرنده، شکل (۳-۴) را در نظر بگیرید که در آن المان سطح δA و بردار یکه‌ی سطح \hat{n} بر روی سطح کنترل CS نشان داده شده است. اثبات این قسمت شبیه اثبات رابطه‌ی (۳-۱۰) است، با این تفاوت که در رابطه‌ی (۳-۱۰) عبور جرم از سطح کنترل بررسی شده است، اما در این قسمت عبور متغیر B در نظر گرفته می‌شود. شبیه آنچه که برای رابطه‌ی (۳-۹) گفته شد، نرخ زمانی جریان گذرنده متغیر B از المان سطح δA به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\delta B}{\delta t} = \frac{\delta(mb)}{\delta t} = b \frac{\delta m}{\delta t} = b \delta \dot{m} = b \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A \quad (20-3)$$

نرخ زمانی خالص جریان گذرنده از سطوح کنترل به صورت یک انتگرال است. لذا، حد کسرهای دوم و سوم رابطه‌ی (۳-۱۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{III} \rho b dV}{\delta t} \right)_{t+\delta t} - \left(\frac{\int_I \rho b dV}{\delta t} \right)_t = \int_{CS} \rho b (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA \quad (21-3)$$

با ترکیب رابطه‌های (۳-۱۸)، (۳-۱۹) و (۳-۲۱)، رابطه‌ی (۳-۱۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA \quad (22-3)$$

رابطه‌ی (۳-۲۲) فرم انتگرالی نظریه‌ی انتقال رینولدز برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل است که برای تبدیل از سیستم به حجم کنترل به کار می‌رود. عبارت سمت چپ این رابطه که فرم سیستم است، با تعقیب سیستم و به کار بردن دیدگاه لاگرانژی حاصل شده است. عبارت سمت راست رابطه که فرم حجم کنترل را نشان می‌دهد، با به کارگیری دیدگاه اویلری و انتخاب دستگاه مختصات ثابت به دست آمده است.

۳-۲-۲ تفسیر فیزیکی موضوع مورد بحث

رابطه‌ی (۳-۲۲) کاربرد وسیعی در مکانیک سیالات دارد. اگرچه در لحظه‌ی اول چنین به نظر می‌رسد که این رابطه پیچیده است، اما با درک فیزیکی از جملات آن کاربردهای ساده‌ی آن مشخص خواهد شد. عبارت سمت چپ رابطه، نرخ زمانی هر متغیری را در یک سیستم نشان می‌دهد. این متغیر می‌تواند یکی از ویژگی‌های سیال از قبیل جرم، اندازه حرکت، انرژی و غیره باشد. برای تعیین این جمله می‌توان از قانون‌های اساسی حرکت از قبیل قانون بقای جرم، اندازه حرکت و غیره برای سیستم استفاده کرد.

چون سیستم متحرک است و حجم کنترل ثابت است، نرخ زمانی متغیر B در سیستم (عبارت سمت چپ رابطه) لزوماً با نرخ زمانی آن در حجم کنترل (اولین عبارت سمت راست رابطه) یکی نیست. جمله‌ی واقع در انتگرال اولین جمله سمت راست، مقدار متغیر B را در حجم کنترل نشان می‌دهد. نرخ زمانی این

۱- Net time rate

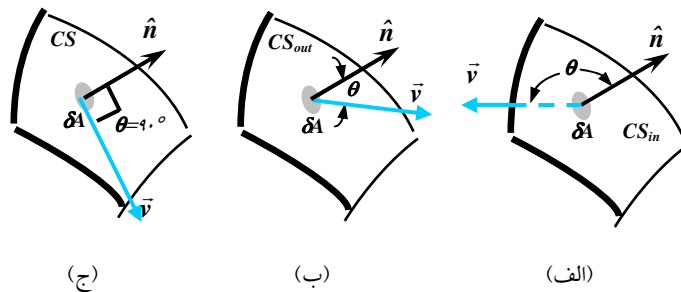
انتگرال برابر مقدار تغییرات این متغیر نسبت به زمان در داخل حجم کنترل است. عبارت دوم سمت راست رابطه، نرخ زمانی خالص جریان گذرنده‌ی متغیر B از کلیه‌ی سطوح کنترل را نشان می‌دهد. عبارت $\rho(\vec{v} \cdot \hat{n})dA$ برابر دبی جرمی است. این جریان می‌تواند مطابق شکل (۳-۵-الف) در دو دسته‌ی جریان ورودی یا خروجی قرار گیرد. برای جریان ورودی خواهیم داشت:

$$\int_{CS_{in}} \rho b(\vec{v} \cdot \hat{n})dA = \int_{CS_{in}} \rho b v_n \cos \theta dA \quad (23-3)$$

که در آن v_n مؤلفه‌ی بردار سرعت در راستای بردار یکه‌ی سطح و θ زاویه‌ی بردار سرعت با بردار یکه است. چون در جریان ورودی $90^\circ < \theta < 180^\circ$ است، علامت $\cos \theta$ همیشه منفی است. لذا، می‌توان گفت که برای کلیه‌ی جریان‌های ورودی علامت این عبارت منفی است. به طریقی مشابه [شکل (۳-۵-ب)] می‌توان نشان داد که علامت این عبارت برای جریان‌های خروجی مثبت است، چون زاویه $\theta < 90^\circ$ است. اگر $\theta = 90^\circ$ باشد [شکل (۳-۵-ج)] و یا مقدار بردار سرعت صفر باشد، مقدار این عبارت صفر است.

۳-۳-۳ حجم کنترل متحرک و شکل‌پذیر

رابطه‌ی (۳-۲۲) برای حجم کنترل ثابت صادق است. در بخش (۳-۲) نشان داده شد که حجم کنترل می‌تواند متحرک یا شکل‌پذیر نیز باشد. نمونه‌ی چنین وضعیتی در بسیاری از وسیله‌ها مثل موتور هواپیما دیده می‌شود. در این کتاب فقط حجم کنترل متحرک با سرعت ثابت و بدون شتاب بررسی می‌شود. چنین حجم کنترلی را **بدون شتاب**^۱ می‌نامند. برای حالت شکل‌پذیر نیز فقط حالتی که یکی از سطوح حجم کنترل جابه‌جا می‌شود مدنظر خواهد بود. برای حجم کنترل متحرک **شتاب‌دار**^۲ به مرجع [۵] مراجعه کنید. حال حجم کنترلی را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت و بدون شتاب در حال حرکت است. شکل و اندازه‌ی حجم کنترل نسبت به زمان تغییری نمی‌کند و فقط با سرعت ثابت \vec{v}_{cv} جابه‌جا می‌شود. سیالی که از سطوح کنترل عبور می‌کند، دارای سرعت متفاوت نسبت به سرعت \vec{v}_{cv} خواهد بود. بنابراین، سرعت سیال از دیدگاه ناظر ثابتی که در روی زمین قرار دارد (سرعت مطلق)، برابر \vec{v} و از دیدگاه ناظری که بر روی حجم کنترل قرار دارد (سرعت نسبی)، برابر \vec{v}_r خواهد بود. همان‌طور که در درس دینامیک خوانده‌اید، رابطه‌ی بین این سرعت‌ها به صورت زیر بیان می‌گردد:



شکل ۳-۵ شمایی
از موقعیت جریان نسبت به سطوح کنترل؛ (الف) جریان ورودی، (ب) جریان خروجی، (ج) جریان صفر.

۱- Inertial

۲- Non-inertial

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_{cv} \quad (24-3)$$

رابطه‌ی (۲۴-۳) یک رابطه‌ی برداری است و می‌توان آن را به صورت جمع مثلثی بردارها نشان داد. نظریه‌ی انتقال رینولدز برای حجم کنترل بدون شتاب، شبیه حجم کنترل ثابت است. هیچ تفاوتی در عبارت اول سمت راست رابطه‌ی (۲۲-۳) برای حجم کنترل بدون شتاب وجود ندارد. تنها باید در عبارت دوم رابطه‌ی (۲۲-۳) سرعت \vec{v} از رابطه (۲۴-۳) به صورت زیر جایگزین شود:

$$\begin{aligned} \frac{dB_{sys}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b [(\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) \cdot \hat{n}] dA \\ \frac{dB_{sys}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA + \int_{CS} \rho b (\vec{v}_{cv} \cdot \hat{n}) dA \end{aligned} \quad (25-3)$$

عبارت آخر رابطه‌ی (۲۵-۳) نشان‌دهنده‌ی مقدار جریان گذرنده‌ی متغیر B سیال از سطوح کنترل با سرعت \vec{v}_{cv} است، در حالی که حجم کنترل نیز با سرعت \vec{v}_{cv} حرکت می‌کند. لذا، هیچ متغیر سیال نمی‌تواند با همان سرعت حجم کنترل از سطوح آن عبور کند و این عبارت برابر صفر است. با توجه به این گفته‌ها، رابطه‌ی (۲۵-۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (26-3)$$

تنها تفاوت رابطه‌ی (۲۶-۳) با رابطه‌ی (۲۲-۳) در این است که به جای سرعت مطلق از سرعت نسبی استفاده خواهد شد. رابطه (۲۶-۳) برای حجم کنترل شکل‌پذیر که در آن سطوح کنترل با سرعت ثابت به حرکت درمی‌آیند نیز صادق است.

۳-۴ رابطه‌ی بقای جرم - رابطه‌ی پیوستگی

اصل بقای جرم^۱ یکی از قوانین اساسی در طبیعت است. این اصل در بسیاری از مسایل مهندسی و همچنین در کلیه‌ی معادلات شیمیایی استفاده می‌گردد. اگرچه رابطه‌ی انرژی انشتین، تبدیل جرم به انرژی را مطرح می‌کند که در راکتورهای اتمی قابل توجه است، اما تغییر جرم در معادلات آنقدر نیست که قابل ملاحظه باشد. برای مثال، هنگامی که یک کیلوگرم آب از ترکیب اکسیژن و هیدروژن تولید می‌شود، انرژی آزادشده برابر ۱۵/۸۷۹ کیلوژول است که طبق رابطه‌ی انرژی انشتین به جرمی برابر 1.76×10^{-10} کیلوگرم تبدیل می‌شود. چنین مقداری از جرم ماورای دقتی است که در مسایل مهندسی مورد نیاز است.

۳-۴-۱ رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل

برای به دست آوردن رابطه‌ی پیوستگی ابتدا لازم است اصل بقای جرم در سیستم ارایه شود و سپس نظریه‌ی انتقال رینولدز در آن اعمال گردد. اصل بقای جرم بدین گونه است که مقدار جرم در یک سیستم ثابت است و نسبت به زمان تغییر نمی‌کند. این قانون به صورت زیر بیان می‌شود:

۱- Conservation of mass

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = 0 \quad (27-3)$$

برای به کارگیری نظریه‌ی انتقال رینولدز ابتدا باید متغیرهای جامع B و متمرکز b را تعیین کرد. همان طور که از اصل بقای جرم پیداست، متغیر مورد مطالعه، جرم است. لذا، متغیر جامع $B = m$ و متغیر متمرکز $b = m/m = 1$ است. برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل کافی است که در رابطه‌ی انتقال رینولدز [رابطه‌ی (۲۲-۳)]، مقادیر متغیرهای جامع و متمرکز را به ترتیب برابر B و b قرار داده و از رابطه‌ی (۲۷-۳) برای تغییرات جرم در سیستم به صورت زیر استفاده شود:

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (1) \rho dV + \int_{CS} (1) \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV}_{\text{نرخ زمانی تغییر جرم در داخل حجم کنترل}} + \underbrace{\int_{CS} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA}_{\text{نرخ زمانی خالص جرم گذرنده از سطوح کنترل}} = 0 \quad (28-3)$$

رابطه‌ی (۲۸-۳) در سیالات به نام **رابطه‌ی پیوستگی**^۱ برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل معروف است. این رابطه نشان می‌دهد که تغییرات مقدار جرم گذرنده از سطوح کنترل، نسبت به زمان، برابر مقدار جرم انباشته شده و یا کاهش یافته در داخل حجم کنترل نسبت به زمان است. عبارت اول رابطه‌ی (۲۸-۳) مقدار تغییر جرم در حجم کنترل را نسبت به زمان نشان می‌دهد. اگر علامت مقدار این عبارت مثبت باشد، مقدار جرم در داخل حجم کنترل در حال افزایش است. هنگامی که علامت مقدار این عبارت منفی است، مقدار جرم در داخل حجم کنترل در حال کاهش است. برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل، تأخر و تقدم اپراتورهای انتگرال و مشتق، تأثیری در مقدار این انتگرال ندارد. به بیانی دیگر، می‌توان اول انتگرال و سپس مشتق گرفت، یا اینکه ابتدا مشتق و سپس انتگرال گرفت. عبارت دوم مقدار دبی جرمی است که قبلاً در بخش (۳-۱-۵) در مورد آن توضیح داده شد. اگر مقادیر دبی جرمی از چندین سطح کنترل مشخص باشد، انتگرال دوم رابطه‌ی (۲۸-۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{CS} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \sum_{out} \dot{m} - \sum_{in} \dot{m} = \sum_{out} (\rho VA) - \sum_{in} (\rho VA) \quad (29-3)$$

که در آن V سرعت یکنواخت در هر سطح مقطع و یا سرعت متوسط \bar{V} است.

برای جریان پایدار ($\partial/\partial t = 0$)، رابطه‌ی (۲۸-۳) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{CS} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \sum_{out} \dot{m} - \sum_{in} \dot{m} = \sum_{out} (\rho VA) - \sum_{in} (\rho VA) = 0 \quad (30-3)$$

رابطه‌ی (۳۰-۳) نشان می‌دهد که برای جریان پایدار، مجموع مقادیر دبی جرمی گذرنده از سطوح کنترل برابر صفر است. این بدان معنی است که هر مقدار دبی جرمی وارد حجم کنترل می‌شود، همان اندازه نیز از

۱- Continuity equation

آن خارج شده و هیچ گونه انباشت یا ذخیره‌ی جرم در داخل حجم کنترل صورت نمی‌گیرد. اگر جریان پایدار، تراکم‌ناپذیر نیز باشد، رابطه‌ی (۳-۳۰) به صورت زیر ساده می‌شود:

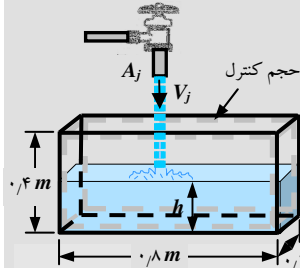
$$\sum_{out} \rho = \sum_{in} \rho \quad (31-3)$$

برای جریان ناپایدار و تراکم‌ناپذیر رابطه (۳-۲۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla) + \int_{CS} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = 0 \quad (32-3)$$



مثال ۳-۳: کاربرد رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل ثابت.



مخزن مکعب مستطیل توسط آبی که از شیر خارج می‌شود در حال پرشدن است. مقدار دبی خروجی آب از شیر ۳ لیتر در ثانیه است. اگر عمق آب در مخزن برابر h باشد، مقدار تغییرات عمق آب نسبت به زمان در مخزن، dh/dt برحسب میلی‌متر در ثانیه چقدر است؟

پاسخ:

حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل در شکل با خط‌چین خاکستری نشان داده شده است. این حجم کنترل شامل آب به عمق h ، مقداری از آب بین خروجی شیر و سطح آب در مخزن و همچنین هوا است. چون آب با هوا مخلوط نمی‌گردد، می‌توان رابطه‌ی پیوستگی را برای آب یا هوا جداگانه به کار برد. چون جرم آب یا هوا در این حجم کنترل در حال تغییر است، جریان ناپایدار است. با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۲) برای حجم کنترل نشان داده شده برای آب و با توجه به اینکه فقط یک جریان ورودی داریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_w) - Q_w = 0 \quad (1)$$

که در آن اندیس w معرف آب است و علامت جریان ورودی منفی است. اگر فرض کنیم که سطح مقطع آب خروجی از شیر تا سطح آب مخزن ثابت است، جمله‌ی اول رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_w) = \frac{\partial}{\partial t} [(0.15m)(0.8m)h + A_j(0.4m - h)] = (0.12m^2 - A_j) \frac{dh}{dt}$$

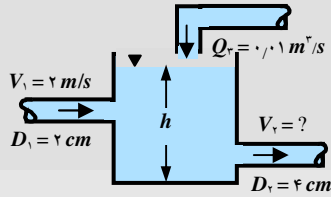
که در آن A_j سطح مقطع جریان آب شیر است. با جایگزینی عبارت فوق در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_w}{(0.12m^2 - A_j)} \quad (2)$$

در کاربردهای عملی می‌توان فرض کرد که $A_j \ll 0.12m^2$ است و لذا رابطه‌ی (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dh}{dt} \cong \frac{Q_w}{0.12m^2} = \frac{0.003m^3/s}{0.12m^2} (1000mm/m) = \underline{\underline{25 \text{ mm/s}}}$$

مثال ۳-۴، مک، ۸۱



در مخزن شکل زیر، اگر ارتفاع آب (h) ثابت باشد، سرعت خروجی V_2 چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ:

چون ارتفاع آب ثابت است، جریان پایدار است و لذا رابطه‌ی (۳-۳۱) به صورت زیر ساده می شود:

$$\sum_{out} Q = \sum_{in} Q$$

$$V_2 A_2 = V_1 A_1 + Q_3$$

$$V_2 \left[\frac{\pi}{4} (0.04 \text{ m})^2 \right] = (2 \text{ m/s}) \left[\frac{\pi}{4} (0.02 \text{ m})^2 \right] + (0.01 \text{ m}^3/\text{s}) \quad ; \quad \underline{V_2 = 8.46 \text{ m/s}}$$

مسائل ۳-۱۷
الی ۳-۲۸ و
مسائل ۳-۳۳
الی ۳-۳۸

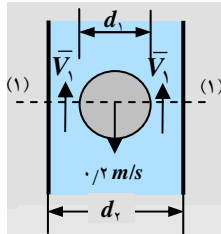
۳-۴-۲ رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل متحرک و شکل پذیر

حجم کنترل متحرک در بسیاری از موارد از قبیل موتور هواپیما، خروج گاز از لوله‌ی آگزوز ماشین و غیره کاربرد دارد. برای حجم کنترل متحرک بدون شتاب می توان از رابطه‌ی (۳-۲۶) استفاده کرد که در آن به جای سرعت مطلق از سرعت نسبی سیال استفاده می شود. با اعمال این رابطه و شبیه آنچه که در بخش پیشین به آن اشاره شد، رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل متحرک بدون شتاب به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA = 0 \quad (۳-۳۳)$$

رابطه‌ی فوق برای حجم کنترل شکل پذیر که سطوح آن با سرعت ثابت در حال حرکت است نیز صادق است. از رابطه‌ی (۳-۲۴) برای به دست آوردن سرعت نسبی می توان استفاده کرد. کلیه‌ی رابطه‌هایی که برای حجم کنترل ثابت ارایه شده است، برای حجم کنترل متحرک بدون شتاب نیز صادق است، مشروط بر اینکه به جای سرعت مطلق از سرعت نسبی سیال استفاده شود.

مثال ۳-۵: کاربرد رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل متحرک.



جسم کروی به قطر $d_1 = 400 \text{ mm}$ با سرعت 0.2 m/s در امتداد محور تقارن یک استوانه به قطر $d_2 = 500 \text{ mm}$ در حال سقوط است. مقدار سرعت متوسط سیال اطراف جسم در مقطع وسط نیم کره [مقطع (۱-۱)]، \bar{V}_1 ، چقدر است؟

پاسخ:

بر اثر سقوط کره در داخل استوانه، سیال اطراف کره جابه‌جا شده و به سمت بالا حرکت می کند. از حجم کنترلی که با همان سرعت کره به سمت پایین حرکت می کند، استفاده می شود. لذا، در هر لحظه حجم

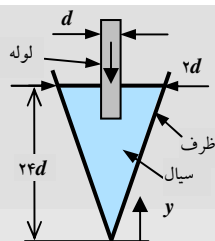
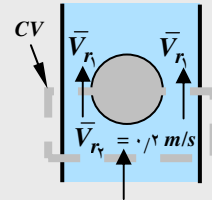
کنترل شامل نیم کره و سیال اطراف و پایین کره خواهد بود. از اطراف کره، سیال با سرعت متوسط نسبی \bar{V}_{r1} به سمت بالا حرکت می‌کند. اگرچه سیال پایین کره ساکن است، اما نسبت به این حجم کنترل با سرعت متوسط نسبی $\bar{V}_{r1} = 0.2 \text{ m/s}$ به سمت بالا حرکت می‌کند. با توجه به اینکه مشخصات سیال از قبیل سرعت نسبت به زمان تغییری نمی‌کند، جریان پایدار است و سیال نیز تراکم‌ناپذیر است. از رابطه پیوستگی [رابطه‌ی (۳-۳۳)] برای حجم کنترل متحرک، سرعت نسبی مقطع (۲) و از آنجا سرعت مطلق به صورت زیر درمی‌آید:

$$Q_{r1} = Q_{r2}$$

$$\bar{V}_{r1} \left\{ \frac{\pi}{4} \left[(0.500 \text{ m})^2 - (0.400 \text{ m})^2 \right] \right\} = (0.2 \text{ m/s}) \left[\frac{\pi}{4} (0.500 \text{ m})^2 \right]$$

$$\bar{V}_{r1} = 0.56 \text{ m/s}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_{r1} + V_{CV} = [0.56 \text{ m/s} + (-0.2 \text{ m/s})] = \underline{\underline{0.36 \text{ m/s}}}$$



مثال ۳-۶، ع، ۸۵

لوله‌ای به قطر d در داخل ظرف مخروطی شکل پر از مایع به سمت پایین با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در چه فاصله‌ی y از نوک مخروط سرعت بالا آمدن مایع (بین دیواره‌ی مخروط و لوله) و سرعت لوله یکی است؟

پاسخ:

این مثال شبیه مثال قبلی، مثال (۳-۵) است، با این تفاوت که در این مثال ظرف مخروطی شکل (با مقطع متغیر در ارتفاع) است. لذا از رابطه‌ی مثال قبل می‌توان استفاده کرد، اما باید رابطه‌ی هندسی برای قطر لوله d و ارتفاع y به دست آورد. رابطه‌ی پیوستگی به صورت زیر درمی‌آید:

$$Q_{r1} = Q_{r2} \quad ; \quad v \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) = V \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \quad ; \quad D = \sqrt{2} d \quad (1)$$

اگر D قطر مخروط در ارتفاع y باشد، رابطه‌ی هندسی بین D و y به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{y}{D} = \frac{24d}{2d} \quad ; \quad D = \frac{y}{12} \quad (2)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$y = 12\sqrt{2} d$$

مثال ۳-۷: کاربرد رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل شکل پذیر.

مثال (۳-۳) را با انتخاب حجم کنترل شکل پذیر بار دیگر حل کنید.

پاسخ:

در این حالت، حجم کنترل شکل‌پذیر فقط شامل آب در مخزن به عمق h است. در این حجم کنترل شکل‌پذیر، سطح کنترل بالایی آن با سرعت dh/dt در حال حرکت است. به بیانی دیگر، عمق آب در این حجم کنترل در هر لحظه برابر h است و رابطه‌ی (۳-۳۳) برای حجم کنترل شکل‌پذیر به کار برده می‌شود. عبارت اول رابطه‌ی (۳-۳۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho_w dV = \rho_w \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} dV = \rho_w \frac{\partial}{\partial t} (V_w) = \rho_w \frac{\partial}{\partial t} [(0.15\text{ m})(0.8\text{ m})h] = 0.12\rho_w \frac{dh}{dt}$$

عبارت دوم رابطه‌ی (۳-۳۳) فقط برای سطح کنترل بالایی حجم کنترل وجود دارد. در قسمتی از این سطح آب خروجی از شیر با سطح مقطع A_j و سرعت V_j به آن وارد می‌شود و باید سرعت نسبی آب را به دست آورد. رابطه (۳-۲۴) برای این سطح کنترل به صورت زیر است:

$$v_r = v - v_{cv} = V_j + \frac{dh}{dt}$$

لذا، رابطه (۳-۳۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$0.12\rho_w \frac{dh}{dt} - \rho_w \left(V_j + \frac{dh}{dt} \right) A_j = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_w}{(0.12\text{ m}^2 - A_j)} \equiv \frac{V_j A_j}{0.12\text{ m}^2} = \frac{Q_w}{0.12\text{ m}^2} = \frac{0.003\text{ m}^3/\text{s}}{0.12\text{ m}^2} (1000\text{ mm}/\text{m})$$

$$\frac{dh}{dt} = 25 \text{ mm}/\text{s}$$

توجه داشته باشید که نتیجه‌ی حاصل از حجم کنترل شکل‌پذیر تفاوتی با نتیجه‌ی حجم کنترل ثابت ندارد.

مسائل ۳-۲۹

الی ۳-۳۶

۳-۵ رابطه‌ی اندازه حرکت

۳-۵-۱ رابطه‌ی اندازه حرکت خطی برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل

قانون دوم نیوتن رابطه‌ی حرکت اجسام و نیروهای وارده بر آنها را بیان می‌کند. این قانون در یک سیستم چنین است: شتاب سیستم در حال حرکت متناسب با نیروهای وارد بر آن است و با جرم آن نسبت عکس دارد. این قانون برای سیستمی به جرم m چنین است:

$$m\bar{a} = \frac{d}{dt} (m\bar{V})_{sys} = \sum_{sys} \bar{F} \quad (۳-۳۴)$$

عبارت سمت چپ این رابطه، نرخ زمانی تغییر اندازه حرکت خطی سیستم و عبارت سمت راست، مجموع نیروهای وارده بر سیستم است. برای به دست آوردن رابطه‌ی اندازه حرکت خطی در حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل از رابطه‌ی انتقال رینولدز استفاده می‌شود. برای حجم کنترلی که در هر لحظه با سیستم یکی است (به اثبات رابطه‌ی انتقال رینولدز مراجعه کنید)، نیروهای وارد بر سیستم همان نیروهایی است که

بر حجم کنترل اثر می‌کند. با توجه به گفته‌های قبلی، مقدار متغیر جامع برابر $B = m\bar{v}$ و متغیر متمرکز $b = m\bar{v}/m = \bar{v}$ می‌باشد. هنگامی که سیستم و حجم کنترل در یک لحظه برهم منطبق هستند، نیروهای وارد بر سیستم همان نیروهای وارد بر حجم کنترل است. از این رو، رابطه‌ی (۳-۲۲) برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d(m\bar{v})_{sys}}{dt} = \sum_{sys} \bar{F} = \sum_{CV} \bar{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho(\bar{v}) d\forall + \int_{CS} \rho(\bar{v})(\bar{v} \cdot \hat{n}) dA \quad (۳-۳۵)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \bar{v} \rho d\forall}_{\text{نرخ زمانی تغییرات اندازه حرکت خطی در داخل حجم کنترل}} + \underbrace{\int_{CS} \bar{v} \rho (\bar{v} \cdot \hat{n}) dA}_{\text{گذرنده از سطوح کنترل}} = \underbrace{\sum_{CV} \bar{F}}_{\text{نیروهای وارد بر حجم کنترل}} \quad (۳-۳۶)$$

رابطه‌ی (۳-۳۶) رابطه‌ی اندازه حرکت خطی^۱ برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییرشکل نامیده می‌شود. کاربرد این رابطه در بخش بعدی توضیح داده خواهد شد.

۳-۵-۲ تفسیر رابطه‌ی اندازه حرکت خطی

رابطه‌ی (۳-۳۶) یک رابطه‌ی برداری است. ضمناً، مؤلفه‌های این رابطه در سه جهت محورهای مختصات قابل تجزیه است. دو عبارت سمت چپ این رابطه مقدار جرم ضرب در شتاب است. اگر شتاب جریان صفر باشد، مقدار سمت راست رابطه نیز صفر است. در چنین حالتی اصل اول نیوتن صادق است. مقدار عبارت اول رابطه‌ی (۳-۳۶) برای جریان‌های پایدار برابر صفر است. اگر رابطه در یکی از جهت‌های محور مختصات نوشته شود، توجه به علامت عبارت دوم سمت چپ رابطه ضروری است. اگر جهت بردار با جهت مثبت محور موردنظر همسو باشد، در آن صورت علامت مؤلفه‌ی بردار در آن جهت مثبت است. در صورتی که جهت آن با جهت مثبت محور غیرهمسو باشد، علامت مؤلفه‌ی بردار منفی است. علامت عبارت دبی جرمی $\rho(\bar{v} \cdot \hat{n}) dA$ برای جریان ورودی منفی و برای جریان خروجی مثبت است. چنانچه توزیع سرعت در سطوح کنترل یکنواخت باشد، عبارت دوم رابطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_{CS} \bar{v} \rho (\bar{v} \cdot \hat{n}) dA = \sum_{CS} \rho Q \bar{V} \quad (۳-۳۷)$$

نیروهای وارد بر حجم کنترل به دو دسته‌ی نیروهای داخلی^۲ و نیروهای سطحی^۲ تقسیم می‌شوند. تنها نیروی داخلی که در این فصل در نظر گرفته می‌شود، نیروی وزن است. نیروهای خارجی شامل نیروهای وارد بر حجم کنترل از مواد خارج از حجم کنترل است. به عبارت دیگر، این نیروها عکس‌العمل محیط اطراف حجم کنترل است. این نیروها می‌تواند شامل نیروی برشی، نیروی فشاری و نیروی عکس‌العمل باشد. نیروی عکس‌العمل از تغییر اندازه حرکت و یا از سایر نیروها به وجود می‌آید. برای مثال، انحنای

جریان باعث نیروی جانب مرکز خواهد شد. این نیرو در رابطه‌ی اندازه حرکت به‌عنوان نیروی عکس‌العمل در مسایل در نظر گرفته می‌شود. معمولاً نیروی عکس‌العمل به سازه‌ی نگهدارنده‌ی سیال وارد می‌شود. برای مثال، اگر سیال درون لوله‌ای در جریان باشد، نیروی عکس‌العمل به لوله وارد می‌شود و برای پایداری لوله، این نیرو باید در طراحی لوله در نظر گرفته شود.

اگر جریان پایدار و یکنواخت باشد، رابطه‌ی (۳-۳۶) به صورت زیر ساده می‌شود:

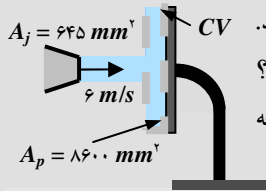
$$\sum_{CS} \rho Q \vec{V} = \sum_{CS} \dot{m} \vec{V} = \sum_{CV} \vec{F} \quad (3-38)$$



کن ۳-۴

مثال ۳-۸: کاربرد رابطه‌ی اندازه حرکت یک‌بعدی برای حجم کنترل ثابت.

جت آب از روزنه‌ای با مساحت $A_j = 645 \text{ mm}^2$ و با سرعت متوسط 6 m/s خارج شده و به صفحه‌ای تخت با مساحت $A_p = 8600 \text{ mm}^2$ که عمود بر جهت جریان است، برخورد می‌کند. **(الف)** نیروی افقی که از طرف آب بر صفحه وارد می‌شود چه اندازه است؟ **(ب)** مقدار نیروی افقی وارد بر صفحه از طرف سیال‌های در تماس با صفحه (آب و هوا) چقدر است؟



پاسخ:

(الف) حجم کنترل ثابت با رنگ خاکستری در شکل نشان داده شده است. فرض می‌شود که سرعت و جهت جت خروجی از روزنه تا صفحه ثابت است. چون مؤلفه‌ی افقی نیروی عکس‌العمل مورد نیاز است، رابطه‌ی (۳-۳۸) در جهت محور جت (محور x) برای جریان پایدار و یکنواخت به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{CS} \rho Q V_x = \sum_{CV} F_x \quad (1)$$

برای تعیین عبارت سمت چپ رابطه، ابتدا مؤلفه‌ی افقی سرعت آب در سطوح کنترل مشخص می‌شود. تنها در قسمت ورود جت به حجم کنترل (جریان ورودی) است که مؤلفه‌ی افقی سرعت و در نتیجه، عبارت سمت چپ صفر نمی‌باشد و بقیه‌ی سطوح کنترل مؤلفه‌ای ندارند. برای تعیین نیروها از دیاگرام آزاد نشان داده شده در شکل استفاده می‌شود. نتایج آزمایشگاهی در مورد جت آب که ضخامت آن زیاد نمی‌باشد و سرعت بالایی ندارد، نشان می‌دهد که فشار در هر مقطع جت تقریباً برابر فشار اتمسفر است. در جهت افق، نیروی ناشی از وزن وارد مسأله نمی‌گردد و نیروی برشی هوا در فاصله‌ی کوتاه بسیار ناچیز است که از آن می‌توان چشم‌پوشی کرد. نیروی عکس‌العمل R_x نیرویی است که از صفحه‌ی تخت به سیال حجم کنترل وارد می‌شود. این نیرو در اثر تغییر اندازه حرکت (تغییر جهت جریان آب) و فشار آب به وجود آمده است. لذا رابطه‌ی (۱) چنین می‌شود:

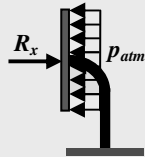
$$(-\rho V_j A_j)(+V_j) = -\rho V_j^2 A_j = -R_x + p_{atm} A_p$$

$$R_x = \rho V_j^2 A_j + p_{atm} A_p$$

$$R_x = (1000 \text{ kg/m}^3)(6 \text{ m/s})^2 (645 \text{ mm}^2) + (101300 \text{ Pa})(8600 \text{ mm}^2)$$

$$R_x = 23.2 \text{ N} + 871.2 \text{ N} = 894.4 \text{ N} \quad (2)$$

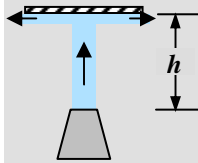
همان‌طور که پیداست، قسمت عمده‌ی این نیرو ناشی از نیروی فشار مربوط به آتمسفر است. چون R_x نیروی وارد از طرف صفحه بر آب است، مقدار نیروی وارد از طرف آب بر صفحه مساوی R_x ولی در جهت خلاف آنچه در شکل نشان داده شده می‌باشد.



(ب) اگر هوای پشت صفحه نیز در نظر گرفته شود، فشار آتمسفر بر قسمت سمت راست صفحه وارد می‌شود. با در نظر گرفتن نیروهای وارده بر صفحه مطابق دیباگرام آزاد، نیروی واقعی یا به عبارت دیگر، نیروی کل عکس‌العمل از جانب آب و هوا بر صفحه به صورت زیر درمی‌آید:

$$R_{xT} = R_x - p_{atm} A_p = 894.4 \text{ N} - 871.2 \text{ N} = 23.2 \text{ N}$$

در این حالت، نیروی افقی از طرف جت آب بر صفحه، برابر با نیروی عکس‌العمل است.



مثال ۳-۹، مع، ۸۴

جت عمودی که از یک روزنه با سرعت 10 m/s و قطر 20 میلی‌متر خارج شده با برخورد به صفحه‌ای با جرم 2 kg ، آن را در فاصله‌ی h نگاه می‌دارد. مقدار فاصله‌ی h بر حسب متر برابر است با ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$):

پاسخ:

این مسأله شبیه مثال قبل [مثال (۳-۸)] است. تنها تفاوت این دو مثال در این است که در مثال حاضر، رابطه‌ی اندازه حرکت در جهت قائم نوشته می‌شود و لذا اثر نیروی وزن را باید در نظر گرفت. با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۸) در امتداد قائم برای حجم کنترلی که شامل جت خروجی تا صفحه است، خواهیم داشت:

$$-R_z - \gamma \nabla_w = -\rho V_j^2 A_j$$

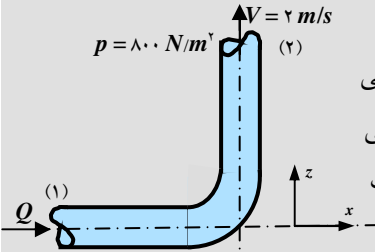
$$-R_z - \gamma \frac{\pi}{4} D_j^2 h = -\rho V_j^2 \frac{\pi}{4} D_j^2 \quad (1)$$

که در آن R_z نیروی عکس‌العمل صفحه، ∇ حجم آب در داخل حجم کنترل، V_j سرعت جت، A_j سطح مقطع جت و D_j قطر جت است. با توجه به تعادل صفحه در جهت قائم، مجموع نیروهای قائم بر صفحه برابر صفر است. لذا، نیروی وارد از طرف جت با وزن صفحه برابر است. به عبارت دیگر، $R_z = m_p g$ است، که در آن m_p جرم صفحه است. لذا، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$m_p g - \gamma \frac{\pi}{4} D_j^2 h = -\rho V_j^2 \frac{\pi}{4} D_j^2$$

$$h = -\frac{m_p}{\rho \pi / 4 D_j^2} + \frac{V_j^2}{g} = -\frac{1.5 \text{ kg}}{(1000 \text{ kg/m}^3) (\pi/4) (0.02 \text{ m})^2} + \frac{(10 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{5.4 \text{ m}}}$$

مثال ۳-۱۰، م.ک، ۸۰



در شکل زیر زانویی با سطح مقطع جریان ۰/۰۱ مترمربع و دبی ۰/۰۲ مترمکعب بر ثانیه نشان داده شده است. وزن آب در زانویی ۴۰ نیوتن است. با صرف نظر از افت انرژی، مؤلفه‌ی قائم نیروی آب بر زانویی چند نیوتن است؟ ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

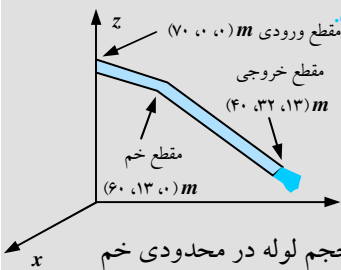
پاسخ:

در این مسأله از اصطکاک بین سیال و بدنه صرف نظر می‌شود و لذا نیروی برشی در نظر گرفته نمی‌شود. رابطه‌ی (۳-۳۸) در راستای قائم برای حجم کنترل شامل زانویی به صورت زیر درمی‌آید:

$$+R_z - W_w - p_2 A = \rho (+Q)(+V_2) \quad ; \quad R_z = W_w + p_2 A + \rho Q V_2$$

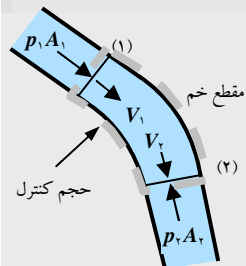
$$R_z = (40 \text{ N}) + (800 \text{ Pa})(0.01 \text{ m}^2) + (1000 \text{ kg/m}^3)(0.02 \text{ m}^3/\text{s})(2 \text{ m/s}) = \underline{\underline{88 \text{ N}}}$$

مثال ۳-۱۱: کاربرد رابطه‌ی اندازه حرکت سه‌بعدی برای حجم کنترل ثابت.



لوله‌ای به قطر ۱۳۰ mm آب را به یک نیروگاه برق آبی منتقل می‌کند. موقعیت مکانی مقاطع ورودی و خروجی یک خم در مسیر جریان و خروجی لوله در شکل نشان داده شده است. در مقطع خروجی، آب به صورت جت وارد آتمسفر می‌گردد. مقادیر فشار در لوله‌های بالادست و پایین دست خم به ترتیب برابر با ۲۰ kPa و ۲۵ kPa است. حجم لوله در محدوده خم برابر ۳ m^۳ و وزن خم ۱۰ kN است. اگر دبی جریان ۱۵ m^۳/s باشد، نیروی وارد به خم چقدر است؟

پاسخ:



در اینجا تغییر مقدار اندازه حرکت ناشی از تغییر مسیر آب در خم، تغییر نیروی فشاری و همچنین وزن لوله است. حجم کنترل در شکل روبه‌رو با رنگ خاکستری نشان داده شده است. چون جریان پایدار است و توزیع سرعت نیز یکنواخت در نظر گرفته می‌شود، رابطه‌ی (۳-۳۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$-\rho \vec{V}_1 Q + \rho \vec{V}_2 Q = \vec{R} + \vec{F}_{p_1} + \vec{F}_{p_2} + \vec{W} \quad (۱)$$

که در آن \bar{V} سرعت متوسط، \bar{R} نیروی عکس‌العمل، \bar{F}_p به ترتیب نیروی فشاری آب، \bar{W} وزن حجم کنترل شامل وزن لوله و وزن آب داخل آن و زیرنویس‌های (۱) و (۲) مربوط به سطوح کنترل است. از آنجایی که نیروهای فشار آتمسفر ناشی از هوا وارد بر سطوح کنترل یکدیگر را خنثی می‌کنند، نیروی ناشی از فشار آتمسفر وارد مسأله نمی‌گردد. بنابراین، متغیرهای موجود در رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\bar{V}_1 = \frac{Q}{A} \hat{n}_1; \bar{V}_2 = \frac{Q}{A} \hat{n}_2; \bar{F}_{p_1} = p_1 A \hat{n}_1; \bar{F}_{p_2} = p_2 A (-\hat{n}_2); \bar{W} = -(\gamma \nabla + W_b) \hat{k}$$

که در آن \hat{n} بردار یک‌ه‌ی سطح کنترل، ∇ حجم آب در حجم کنترل و W_b وزن خم است. بردارهای یک‌ه در سطوح کنترل (۱) و (۲) از مختصات فضایی لوله قبل و بعد از خم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{(13-0)^2 + (70-60)^2}} (13\hat{j} - 10\hat{k}) = 0.793\hat{j} - 0.610\hat{k}$$

$$\hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{(13-0)^2 + (32-13)^2 + (60-40)^2}} (13\hat{i} + 19\hat{j} - 20\hat{k})$$

$$\hat{n}_2 = 0.426\hat{i} + 0.623\hat{j} - 0.656\hat{k}$$

با جایگزینی مقادیر فوق در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\bar{R} = -\rho \left(\frac{Q}{A} \hat{n}_1 \right) Q + \rho \left(\frac{Q}{A} \hat{n}_2 \right) Q - p_1 A \hat{n}_1 - p_2 A (-\hat{n}_2) - (\gamma \nabla + W_b) \hat{k}$$

$$\bar{R} = -\left(\rho \frac{Q^2}{A} + p_1 A \right) \hat{n}_1 + \left(\rho \frac{Q^2}{A} + p_2 A \right) \hat{n}_2 - (\gamma \nabla + W_b) \hat{k}$$

$$\bar{R} = -\left[(999 \text{ kg/m}^3) \frac{(15 \text{ m}^3/\text{s})^2}{\pi/4 (1.3 \text{ m})^2} + (20000 \text{ Pa}) \frac{\pi}{4} (1.3 \text{ m})^2 \right] (0.793\hat{j} - 0.610\hat{k}) +$$

$$\left[(999 \text{ kg/m}^3) \frac{(15 \text{ m}^3/\text{s})^2}{\pi/4 (1.3 \text{ m})^2} + (25000 \text{ Pa}) \frac{\pi}{4} (1.3 \text{ m})^2 \right] (0.426\hat{i} + 0.623\hat{j} - 0.656\hat{k}) -$$

$$\left[(9810 \text{ N/m}^3) (3 \text{ m}^3) + (10000 \text{ kN}) \right] \hat{k}$$

$$\bar{R} = 86.4\hat{i} - 29.2\hat{j} + 26.0\hat{k} \quad \text{kN}$$

حال این سؤال در ذهن خوانندگان پیش می‌آید که چرا نیروی برشی در این معادلات ظاهر نمی‌شود. باید اظهار داشت که برآورد نیروی برشی در اکثر پدیده‌های سیالاتی کاری بس دشوار است. در این مسأله فرض می‌شود که مرز حجم کنترل به مقدار کمی بیرون از مرز لوله باشد. در این صورت نیروی برشی در سطوح کنترل وارد نمی‌شود. بنابراین، در حقیقت نیروی عکس‌العمل شامل نیروی برشی نیز می‌شود.

۳-۵-۳ رابطه‌ی اندازه حرکت خطی برای حجم کنترل متحرک و شکل پذیر

همان‌طور که در بخش (۳-۳-۳) ذکر شد، حجم کنترل متحرک، بدون شتاب و با سرعت ثابت در مسیری مستقیم حرکت می‌کند. در حجم کنترل شکل‌پذیر، فقط حرکت سطوح کنترل با سرعت ثابت مد نظر است. با در نظر گرفتن رابطه‌های (۲۴-۳)، (۲۶-۳) و (۳۶-۳)، رابطه‌ی اندازه حرکت برای حجم کنترل بدون شتاب به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) \rho dV + \int_{CS} (\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA = \sum_{CV} \vec{F} \quad (۳۹-۳)$$

برای جریان پایدار، عبارت اول سمت چپ رابطه‌ی (۳۹-۳) حذف می‌شود و خواهیم داشت:

$$\int_{CS} (\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA = \sum_{CV} \vec{F} \quad (۴۰-۳)$$

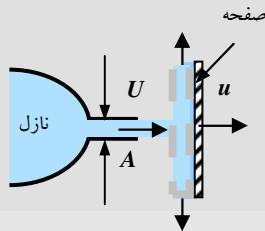
عبارت سمت چپ رابطه‌ی (۴۰-۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{CS} (\vec{v}_r + \vec{v}_{cv}) \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA = \int_{CS} \vec{v}_r \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA + \vec{v}_{cv} \int_{CS} \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA \quad (۴۱-۳)$$

بر اساس رابطه‌ی پیوستگی و برای جریان پایدار، عبارت دوم سمت راست رابطه‌ی (۴۱-۳) برابر صفر است. لذا، رابطه‌ی (۴۰-۳) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{CS} \vec{v}_r \rho (\vec{v}_r \cdot \hat{n}) dA = \sum_{CV} \vec{F} \quad (۴۲-۳)$$

مثال ۳-۱۲، مش، ۸۵



جت افقی با سرعت U از نازل خارج می‌شود. سطح خروجی جت آب برابر A می‌باشد. اگر این جت به صفحه‌ی قائمی که با سرعت u حرکت می‌کند، برخورد کند، نیروی وارد بر صفحه برابر است با:

پاسخ:

رابطه (۴۲-۳) برای حجم کنترلی که شبیه مثال (۸-۳) است، در راستای حرکت صفحه به کار برده می‌شود. تنها تفاوت در متحرک بودن حجم کنترل مسأله‌ی حاضر است. در اینجا تنها در سطح ورودی جت به حجم کنترل، عبارت اول سمت چپ رابطه‌ی (۴۲-۳) مؤلفه دارد. به عبارت دیگر،

$$\vec{V}_{r_x} (\rho \vec{V}_r A) = R_x \quad (۱)$$

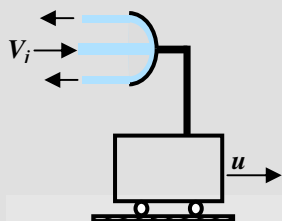
که در آن R_x نیروی عکس‌العمل صفحه بر جت و \vec{V}_r سرعت نسبی جت آب در مقطع ورودی است. در این مقطع، سه سرعت مطلق، سرعت حجم کنترل و سرعت نسبی در یک راستا هستند، لذا رابطه‌ی برداری (۲۴-۳) به صورت زیر تبدیل به رابطه‌ای اسکالر می‌گردد:

$$V_r = V - V_{cv} = U - u \quad (۲)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$R_x = (U - u) \rho (U - u) A = \underline{\underline{\rho A (U - u)^2}}$$

در اینجا فرض شده است که مقدار سرعت و جهت جت تا برخورد به صفحه ثابت است.



مثال ۳-۱۳، مم، ۸۶

جت آب مطابق شکل زیر به یک پره برخورد نموده و به اندازه‌ی 180° تغییر مسیر می‌دهد. سرعت پره برابر با مقدار معلوم u است. اگر بدانیم که توان انتقالی به پره ماکزیمم خود را دارد، سرعت جت آب چقدر است؟

پاسخ:

این مسأله شبیه مثال (۳-۱۲) است، با این تفاوت که جت آب به اندازه‌ی 180° تغییر مسیر می‌دهد و دو جریان خروجی را به وجود می‌آورد. با به کارگیری رابطه‌ی (۳-۴۲) برای حجم کنترلی شبیه مثال (۳-۸) و در راستای حرکت اتومبیل خواهیم داشت:

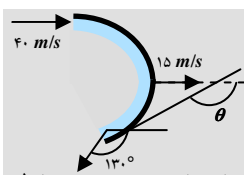
$$\sum_{CV} F_x = \int_{CS} \rho V_{rx} (\bar{V}_r \cdot \bar{n}) \quad ; \quad R_x = 2\rho A_j (V_j - u)^2 \quad (۱)$$

که در آن R_x نیروی عکس‌العمل اتومبیل بر جت، \bar{V}_r سرعت نسبی جت آب در مقطع ورودی و A_j سطح مقطع جت است. توان انتقالی به پره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = \bar{R} \cdot \bar{u} = R_x u = 2\rho A_j (V_j - u)^2 u$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی فوق، مقدار V_j در ازای توان حداکثر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dP}{du} = 2\rho A_j (3u^2 - 4V_j u + V_j^2) = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{u = \frac{V_j}{3}}}$$



مثال ۳-۱۴: کاربرد رابطه‌ی سرعت برای حجم کنترل متحرک.

جت آب با سرعت 40 m/s به پره‌ی انحنادار که در صفحه‌ی افق قرار دارد برخورد می‌کند. پره نیز با سرعت 15 m/s در حرکت است. زاویه‌ی سرعت مطلق خروجی جت آب برابر 130° است. اگر سطح مقطع جت ثابت بماند، مقدار زاویه‌ی پره در مقطع خروجی (زاویه‌ی θ در شکل بالا) را به دست آورید. از اصطکاک هوا و آب صرف نظر کنید.

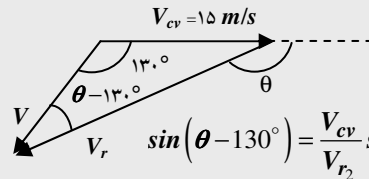
پاسخ:

حجم کنترل متحرک شامل جت آب است که با سرعت پره حرکت می‌کند. رابطه‌ی پیوستگی نشان

می‌دهد که دبی نسبی ورودی و خروجی برای جریان پایدار یکسان است. از آنجایی که سطح مقطع جت ثابت فرض شده است، $V_{r_2} = V_{r_1}$ است. در مقطع (۱) (مقطع ورودی) سه سرعت مطلق، نسبی و حجم کنترل در یک راستا است و لذا رابطه‌ی (۳-۲۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$V_{r_2} = V_{r_1} = V_1 - V_{cv} = (40 \text{ m/s}) - (15 \text{ m/s}) = 25 \text{ m/s}$$

در مقطع (۲)، سرعت نسبی با زاویه‌ی پره، θ ، خارج می‌شود و سرعت مطلق، سرعت حجم کنترل و سرعت نسبی در یک راستا نیستند. با توجه به رابطه‌ی برداری (۳-۲۴) و شکل زیر، در مقطع (۲) می‌توان نوشت:



$$\frac{V_{r_2}}{\sin 130^\circ} = \frac{V_{cv}}{\sin(\theta - 130^\circ)}$$

$$\sin(\theta - 130^\circ) = \frac{V_{cv}}{V_{r_2}} \sin 130^\circ = \frac{(50 \text{ m/s})}{(80 \text{ m/s})} (0.766) = 0.479 \quad ; \quad \underline{\underline{\theta = 158.6^\circ}}$$

بنابراین، سرعت خروجی در مقطع (۲) نسبت به ناظر ثابت دارای زاویه‌ی 130° درجه و نسبت به ناظر متحرک که روی پره قرار دارد، دارای زاویه‌ی پره $\theta = 158.6^\circ$ است.

مسائل ۳-۶۳
الی ۳-۶۸

۳-۵-۴ ضریب تصحیح اندازه حرکت

معمولاً برای سهولت حل یک مسأله از توزیع یکنواخت سرعت در سطوح کنترل استفاده می‌شود، درحالی‌که توزیع سرعت در سطوح کنترل غالباً یکنواخت نیست. این کار باعث می‌شود تا رابطه‌ی (۳-۳۶) یا رابطه‌ی (۳-۴۲) به درستی برآورد نگردد. برای جبران این اثر از ضریبی به نام **ضریب تصحیح اندازه حرکت**، β ، استفاده می‌شود که اولین بار توسط دانشمندی به نام **بوزینسک**^۱ معرفی گردید. با توجه به آن، عبارت دوم رابطه‌ی (۳-۳۶) به صورت زیر تصحیح می‌شود:

$$\int_{CS} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \sum_{CS} \beta \rho Q \vec{V} \quad (۳-۴۳)$$

مقدار ضریب β به توزیع سرعت جریان بستگی دارد. برای جریان یکنواخت، $\beta = 1$ است. با توجه به رابطه‌ی (۳-۴۳)، ضریب β برای هر سطح کنترل به صورت زیر است:

$$\beta = \frac{\int \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA}{\dot{m} \vec{V}} \quad (۳-۴۴)$$

برای محاسبه‌ی مقدار این ضریب دانستن توزیع سرعت الزامی است. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر توزیع سرعت معلوم باشد، دیگر نیازی به محاسبه‌ی ضریب β نیست، چون عبارت انتگرالی دوم رابطه‌ی (۳-۳۶) قابل محاسبه است. درحقیقت، مقادیر این ضریب برای تعدادی از جریان‌های شناخته شده مشخص است و با دانستن نوع جریان می‌توان از این ضرایب استفاده کرد. به یاد داشته باشید که ضریب β برای هر نوع توزیع سرعت (به جز توزیع یکنواخت) بزرگ‌تر از عدد یک است.

مسائل ۳-۶۹،
۳-۹۰ و
۳-۹۴

۱- Momentum correction factor

۲- Bousinesque

۳-۵-۵ رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت

رابطه‌ی اندازه حرکت خطی که در بخش پیشین به آن اشاره شد، برای بیان ارتباط اندازه حرکت خطی جریان با نیروهای وارد بر آن است. در بسیاری از مسایل مهندسی، لنگر^۱ نیروهای وارد بر یک سیستم حول محور مورد نیاز است. اگرچه می‌توان از رابطه‌ی اندازه حرکت برای حل چنین مسایلی استفاده کرد، ولی با لنگر گرفتن از تغییر اندازه حرکت و نیروهای وارد بر یک سیستم به نام لنگر اندازه حرکت^۲ دست خواهیم یافت. بخش مهمی از دستگاه‌هایی به نام توربوماشین که شامل دستگاه‌هایی از قبیل پمپ، توربین، هواکش، وغیره می‌شود، با استفاده از رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت تحلیل می‌شوند.

اثبات رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت را از یک سیستم شروع می‌کنیم. سیستم موجود در شکل (۳-۶) را در نظر بگیریم. رابطه‌ی اندازه حرکت خطی برای ذره‌ای از این سیستم با جرم δm به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}(\delta m \vec{v})_p = \delta \vec{F}_p \quad (۳-۴۵)$$

موقعیت ذره با بردار مکان \vec{r} در شکل نشان داده شده است. لنگر رابطه‌ی (۳-۴۵) نسبت به مرکز مختصات به صورت زیر درمی‌آید:

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(\delta m \vec{v})_p = \vec{r} \times \delta \vec{F}_p \quad (۳-۴۶)$$

با کمک قوانین ریاضی، رابطه‌ی فوق به صورت زیر درمی‌آید:

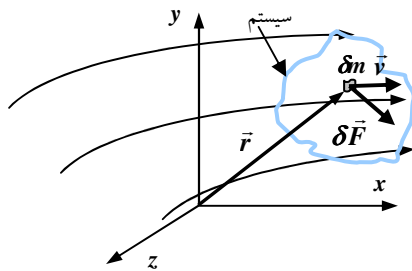
$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(\delta m \vec{v})_p = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \delta m \vec{v})_p \quad (۳-۴۷)$$

برای یک سیستم که متشکل از تعداد زیادی ذره است، رابطه‌ی (۳-۴۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{sys} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \delta m \vec{v}) = \sum_{sys} (\vec{r} \times \delta \vec{F}) \quad (۳-۴۸)$$

چون جرم سیستم ثابت است، حد انتگرال سمت چپ رابطه‌ی (۳-۴۸) ثابت است و اپراتور مشتق را می‌توان بیرون از انتگرال قرار داد. لذا، رابطه‌ی (۳-۴۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{dt} \int_{sys} (\vec{r} \times \vec{v}) \delta m = \sum_{sys} (\vec{r} \times \delta \vec{F}) \quad (۳-۴۹)$$



شکل ۳-۶ شمایی از موقعیت یک ذره در دستگاه مختصات کارتزین.

رابطه‌ی (۳-۴۹) رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت در یک سیستم است.

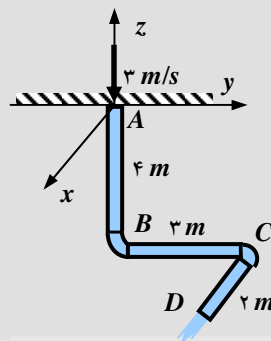
برای به دست آوردن رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت در حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل از رابطه‌ی انتقال رینولدز استفاده می‌شود. برای حجم کنترلی که در هر لحظه با سیستم یکی است (به اثبات رابطه‌ی انتقال رینولدز مراجعه کنید)، لنگر نیروهای وارد بر سیستم همان لنگر نیروهایی است که بر حجم کنترل وارد می‌شود. مقدار متغیر جامع برابر $B = m(\vec{r} \times \vec{v})$ و متغیر متمرکز $b = m(\vec{r} \times \vec{v})/m$ است. لذا، رابطه‌ی (۳-۴۸) با استفاده از نظریه‌ی انتقال رینولدز برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV + \int_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \sum_{CV} (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (۳-۵۰)$$

نرخ زمانی تغییر لنگر اندازه حرکت در داخل حجم کنترل	نرخ زمانی خالص لنگر اندازه حرکت گذرنده از سطوح کنترل	لنگر نیروهای وارد بر حجم کنترل
--	--	--------------------------------

رابطه‌ی (۳-۵۰) رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل است.

مثال ۳-۱۵: کاربرد رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت برای حجم کنترل ثابت.



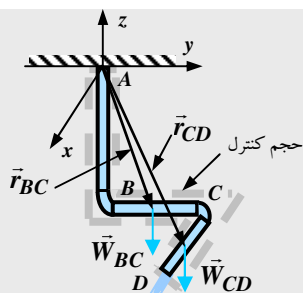
در شکل روبه‌رو، آب در لوله‌ای به قطر 150 mm که از سقف کارخانه‌ای آویزان است در حال جریان است. لنگر وارد بر لوله در تکیه‌گاه A را که از آب، هوا و وزن لوله تشکیل می‌شود، به دست آورید. وزن واحد طول لوله برابر 30 kg/m و فشار نسبی آب در نقطه‌ی A برابر 60 kPa است.

پاسخ:

حجم کنترل ثابت شامل لوله است که در شکل نشان داده شده است. برای جریان پایدار، رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت [رابطه‌ی (۳-۵۰)] با فرض توزیع یکنواخت سرعت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho VA = \sum_{CV} (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (۱)$$

جریان فقط در سطوح کنترل A و D حجم کنترل انتخابی شکل زیر وجود دارد. لنگر نیروی فشار اتمسفر که بر دو طرف لوله وارد می‌شود، صفر است. لنگر فشار داخل لوله در مقطع A ، لنگر وزن لوله‌ی AB و لنگر اندازه حرکت در مقطع A صفر است و این به خاطر آن است که بردار مکان، یا برابر صفر است و یا از مبدأ می‌گذرد. از طرف دیگر، با توجه به رابطه‌ی پیوستگی می‌توان نشان داد که سرعت جریان در مقاطع A و D یکسان است. لذا، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:



$$[(\vec{r} \times \vec{v}) \rho V A]_C = (\vec{r} \times \vec{W})_{BC} + (\vec{r} \times \vec{W})_{CD} + \vec{T}_R \quad (2)$$

که در آن \vec{T}_R لنگر عکس العمل است. با توجه به شکل، مؤلفه‌های رابطه‌ی (۲) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

- در مقطع C:

$$\vec{r}_C = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k} ; V_C = 3\hat{i} ; A = \frac{\pi}{4}(0.15\text{ m})^2 = 0.0177\text{ m}^2$$

$$[(\vec{r} \times \vec{v}) \rho V A]_C = [(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \times (4\hat{i})] (999\text{ kg/m}^3)(3\text{ m/s})(0.0177\text{ m}^2)$$

$$[(\vec{r} \times \vec{v}) \rho V A]_C = -636\hat{k} - 847\hat{j}$$

- در فاصله‌ی BC:

$$(\vec{r} \times \vec{W})_{BC} = (1.5\hat{j} - 4\hat{k}) \times \left[\begin{matrix} (3\text{ m})(30\text{ kg/m}^3) + (9810\text{ N/m}^3) \\ (3\text{ m})(0.0177\text{ m}^2) \end{matrix} \right] (-\hat{k}) = -915\hat{i}$$

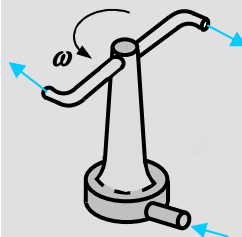
- در فاصله‌ی CD:

$$(\vec{r} \times \vec{W})_{CD} = (\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \times \left[\begin{matrix} (2\text{ m})(30\text{ kg/m}^3) + (9810\text{ N/m}^3) \\ (2\text{ m})(0.0177\text{ m}^2) \end{matrix} \right] (-\hat{k}) = 407\hat{j} - 1220\hat{i}$$

با جایگزینی مقادیر فوق در رابطه‌ی (۲) و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\vec{T}_R = 305\hat{i} - 440\hat{j} - 636\hat{k}$$

در اینجا، لنگر اندازه حرکت $(-636\hat{k} - 847\hat{j})$ سهم عمده‌ای در لنگر نیروی عکس العمل دارد.



مثال ۳-۱۶: کاربرد رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت برای جریان یک‌بعدی.

جریان آب در یک آب‌پاش را مطابق شکل روبه‌رو که برای آبیاری چمن به کار می‌رود در نظر بگیرید. آب با دبی 1 L/s از لوله‌ی افقی وارد دستگاه می‌شود و وارد لوله‌ی عمودی پایه‌ی آب‌پاش می‌گردد. سپس، آب، وارد دو بازوی افقی دستگاه می‌شود و از روزنه‌های دو بازو در جهت عمود بر بازو خارج می‌شود. این عمل باعث چرخش آب‌پاش با سرعت زاویه‌ای ω می‌گردد. مساحت خروجی روزنه 30 mm^2 و شعاع متوسط هر بازو 200 mm است.

(الف) لنگر مقاوم در حالت کلی برای این مسأله چگونه است؟

(ب) مقدار لنگر مقاوم برای حالتی که از چرخش آب‌پاش جلوگیری شود چقدر است؟

(ج) مقدار لنگر مقاوم در حالتی که آب‌پاش با سرعت زاویه‌ای 500 rpm بچرخد چقدر است؟



ک ۳-۵

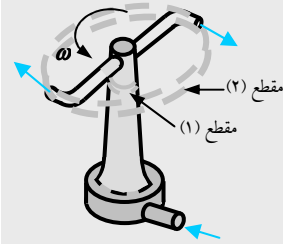
(د) چنانچه لنگر مقاوم برابر با صفر باشد، مقدار سرعت زاویه‌ای چقدر است؟

پاسخ:

(الف) برای حل چنین مسائلی که در دستگاه‌هایی از قبیل پمپ و توربین کاربرد دارد، فرضیاتی به قرار زیر در نظر گرفته می‌شود:

- سرعت زاویه‌ای دوران ثابت است.
- رابطه‌ی لنگر اندازه حرکت حول یک محور دوران تحلیل می‌شود.
- توزیع سرعت در کلیه‌ی سطوح کنترل، یکنواخت در نظر گرفته می‌شود.
- چون خصوصیات مسأله در تمام دورها یکسان است، این نوع جریان را پایدار سیکلی^۱ می‌نامند.

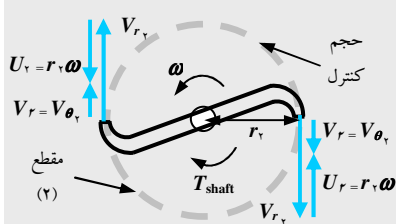
حجم کنترل ثابت بدون تغییرشکل به شکل دیسک و سطوح کنترل ورودی و خروجی در شکل نشان داده شده است. سطح ورودی (۱) محور دوران را قطع می‌کند. محور دوران همان محور پایه‌ی عمودی است.



هنگامی که آب پاش می‌چرخد، جریان در این حجم کنترل ناپایدار است. اما، چون تمام سیکل‌ها شبیه همدیگر هستند، قلمروی جریان در هر سیکل پایدار در نظر گرفته می‌شود. لذا،

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV = 0 \quad (1)$$

عبارت دوم رابطه‌ی (۳-۵۰) فقط در مقاطع (۱) و (۲) مؤلفه دارد، زیرا که دبی در این دو مقطع وجود دارد. در مقطع (۱) به علت اینکه بردار سرعت و بردار مکان هم‌راستا هستند عبارت $(\vec{r} \times \vec{v})$ صفر است. در مقطع (۲) مقدار عبارت $(\vec{r} \times \vec{v})$ برابر با $r_2 V_{\theta_2}$ است که مقدار



شعاع چرخش از محور تا مرکز روزنه و V_{θ_2} مقدار سرعت مماسی جریان نسبت به ناظری است که نسبت به حجم کنترل ثابت است. در حقیقت، V_{θ_2} مؤلفه‌ی مماسی سرعت مطلق است. رابطه‌ی بین سرعت‌ها در شکل بالا نشان داده شده است. سرعت V_2 سرعت مطلق جریان نسبت به حجم کنترل ثابت است. در این مسأله، چون راستای سرعت خروجی بر راستای شعاع عمود است، $V_2 = V_{\theta_2}$ است. سرعت نسبی V_{r_2} از مقدار دبی تقسیم بر سطح مقطع روزنه به دست می‌آید. سرعت U_2 سرعت خطی ناشی از سرعت زاویه‌ای، ω است. رابطه‌ی بین این سرعت‌ها مطابق رابطه‌ی (۳-۲۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{U} \quad (2)$$

$$V_2 = V_{\theta_2} = V_{r_2} - U_2 = \frac{Q}{2A_0} - r_2 \omega \quad (3)$$

که در آن A_0 سطح مقطع روزنه است. علامت عبارت دوم سمت چپ رابطه‌ی (۳-۵۰) از حاصل ضرب علامت دبی و علامت $(\vec{r} \times \vec{v})$ تعیین می‌شود. علامت دبی با توجه به ورودی یا خروجی و علامت $(\vec{r} \times \vec{v})$ با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود. لذا، عبارت سمت چپ رابطه‌ی (۳-۵۰) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = (-r_2 V_{\theta_2}) (+\dot{m}) \quad (۴)$$

برای محاسبه‌ی عبارت سمت راست رابطه‌ی (۳-۴۸)، باید لنگر نیروها را در نظر گرفت. در مقطع (۱)، چون بردار مکان در راستای محور است، لنگر فشار آب برابر صفر است. در مقطع (۲)، فشار آب برابر فشار آتمسفر و در اطراف بازوهای چرخنده نیز نیروی فشار آتمسفر در خلاف یکدیگر می‌باشند و لذا لنگر آنها صفر است. از اصطکاک هوا نیز صرف نظر می‌شود. تنها نیروی مقاوم مربوط به محور آب‌پاش است که لنگر مقاوم، T_{shaft} ، ایجاد می‌کند و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{CV} (\vec{r} \times \vec{F}) = -T_{shaft} \quad (۵)$$

در رابطه‌ی (۵)، علامت T_{shaft} با توجه به قانون دست راست تعیین شده است. با ترکیب رابطه‌های (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$T_{shaft} = r_2 V_{\theta_2} \dot{m} \quad (۶)$$

(ب) هنگامی که از چرخش آب‌پاش جلوگیری شود، رابطه‌ی (۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$V_{\theta_2} = \frac{Q}{2A_0} - r_2(0) = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{2(30 \times 10^{-6} \text{ m}^2)} = 16.7 \text{ m/s} \quad (۷)$$

و لذا رابطه‌ی (۶) چنین می‌شود:

$$T_{shaft} = (0.2 \text{ m})(16.7 \text{ m/s})(999 \text{ kg/m}^3)(0.001 \text{ m}^3/\text{s}) = \underline{\underline{3.34 \text{ N.m}}}$$

(ج) در این حالت مقادیر سرعت و لنگر مقاوم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega = 500 \text{ rpm} = 500 \frac{2\pi}{60} = 52.4 \text{ rad/s}$$

$$V_{\theta_2} = \frac{Q}{2A_0} - r_2 \omega = 16.7 \text{ m/s} - (0.2 \text{ m})(52.4 \text{ rad/s}) = 16.7 \text{ m/s} - 10.5 \text{ m/s} = 6.2 \text{ m/s}$$

$$T_{shaft} = (0.2 \text{ m})(6.2 \text{ m/s})(999)(0.001 \text{ m}^3/\text{s}) = \underline{\underline{1.24 \text{ N.m}}}$$

(د) هنگامی که لنگر برابر با صفر است، سرعت مماسی مطلق صفر است، و لذا خواهیم داشت:

$$V_{\theta_2} = V_{r_2} - U_2 = V_{r_2} - r_2 \omega = 0$$

$$\omega = \frac{V_{r_2}}{r_2} = \frac{16.7 \text{ m/s}}{0.2 \text{ m}} = 83.5 \text{ rad/s} = \underline{\underline{797 \text{ rpm}}}$$

در دستگاه‌هایی از قبیل پمپ و توربین، تعدادی پره‌ی متوالی بر روی یک محیط چرخنده قرار دارند. برای به‌دست آوردن لنگر محور (T_{shaft})، توجه به شرایط سیال در مقاطع ورودی و مقاطع خروجی ضروری است. اگرچه در مثال (۳-۱۶) فقط جریان خروجی دارای لنگر بود، اما در پره‌های پمپ و توربین جریان ورودی نیز دارای لنگر است.

به‌طور کلی، توجه به دستورالعمل زیر می‌تواند در به‌دست آوردن لنگر محور کمک کند:

- بعد از انتخاب حجم کنترل، سطوح کنترلی را در نظر بگیرید که در آن عبارت دوم رابطه‌ی (۳-۵۰) مساوی صفر نیست.
- در هر سطح کنترل، مثلث بردار سرعت‌ها را برای سرعت مطلق، V ، سرعت نسبی، V_r ، و سرعت دوران محور چرخش، ω ، رسم کرده و بردار سرعت مطلق را از رابطه‌ی $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$ به‌دست آورید.
- مؤلفه‌ی مماسی بردار سرعت مطلق، V_θ ، را در هر سطح کنترل محاسبه کنید.
- مقدار لنگر محور، $rV_\theta \dot{m}$ ، در هر سطح کنترل را محاسبه کنید.
- با جمع جبری مقادیر لنگر محور در کلیه‌ی سطوح کنترل، مقدار کل لنگر به‌دست می‌آید.



ک ۳-۶

مثال ۳-۱۷، م، ع، ۸۵

آب با سرعت 10 m/s از نازل‌های یک آب‌پاش مطابق شکل به آتمسفر فوران می‌کند. در صورتی که قطر نازل‌ها هر یک 1 cm و فاصله‌ی محور دوران به ترتیب $L_A = 2a \text{ cm}$ و $L_B = a \text{ cm}$ باشد، گشتاور نیروهای وارد از طرف فوران مایع به آب‌پاش در سیستم SI چند $N.m$ خواهد بود؟ (جرم مخصوص آب $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

پاسخ:

از رابطه‌ی (۶) مثال (۳-۱۶) برای محاسبه‌ی لنگر استفاده می‌شود. لنگر نازل A بیش از نازل B و در خلاف آن است. برای محاسبه‌ی لنگر مانند آنچه که در مثال (۳-۱۶) توضیح داده شد، محاسبه‌ی مقدار سرعت مطلق لازم است. چون در این سؤال مقدار ω داده نشده است، لذا به نظر می‌رسد که سرعت مطلق آب برابر 10 m/s است. در غیر این صورت مثال با این معلومات قابل حل نیست. لذا خواهیم داشت:

$$T_{shaft_A} = r_A V_{\theta_A} \dot{m} = r_A V_A (\rho V_A A)$$

$$T_{shaft_A} = \left(\frac{2a}{100} \text{ m} \right) (10 \text{ m/s}) \left[(1000 \text{ kg/m}^3) (10 \text{ m/s}) \frac{\pi}{4} (0.01 \text{ m})^2 \right]$$

$$T_{shaft_A} = 0.05\pi a \text{ N.m}$$

مقدار لنگر نازل B نصف نازل A است. لذا، لنگر کل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_t = T_{shaft_A} - T_{shaft_B} = 0.05\pi a - 0.025\pi a = \underline{\underline{0.025\pi a \text{ N.m}}}$$

مسائل ۳-۷۰

الی ۳-۷۳

۳-۶ اصل اول ترمودینامیک - رابطه‌ی انرژی

۳-۶-۱ اشتقاق رابطه

یکی از قوانین اساسی در طبیعت اصل اول ترمودینامیک^۱ یا اصل بقای انرژی^۲ است. این اصل، اساس مطالعه‌ی رابطه‌ی موجود بین شکل‌های گوناگون انرژی و تبادل آنها است. اصل اول ترمودینامیک بیانگر آن است که انرژی در یک فرایند نه تولید می‌شود و نه از بین می‌رود، بلکه تغییر شکل می‌دهد. برای مثال، قطعه سنگی را در نظر بگیرید که از بالای صخره‌ای در حال سقوط است. هنگام سقوط قطعه سنگ، به‌خاطر تبدیل انرژی پتانسیل موجود به انرژی جنبشی، سرعت آن در حال افزایش است. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که کاهش انرژی پتانسیل برابر افزایش انرژی جنبشی است، مشروط بر اینکه مقاومت هوا ناچیز باشد. در طبیعت انواع مختلف انرژی شامل حرارتی، مکانیکی، جنبشی، پتانسیل، الکتریکی، مغناطیسی، شیمیایی و اتمی قابل بررسی است. مجموع انرژی‌های موجود در یک سیستم، انرژی ذخیره‌شده‌ی کل^۳، E ، سیستم را تشکیل می‌دهد.

برای درک بیشتر و بهتر از رابطه‌ی انرژی، گذراندن درس پیش‌نیازی به نام ترمودینامیک امری ضروری به نظر می‌رسد. در اینجا سعی خواهد شد که به زبانی ساده، مفاهیم این اصل در این بخش بیان شود. رابطه‌ی انرژی برای یک سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{CV} e \rho dV}_{\text{نرخ زمانی افزایش انرژی ذخیره‌شده‌ی کل در سیستم}} = \underbrace{\left(\sum \dot{Q}_{in} + \sum \dot{Q}_{out} \right)_{sys}}_{\text{نرخ زمانی خالص انرژی افزوده شده به سیستم در اثر انتقال گرما}} + \underbrace{\left(\sum \dot{W}_{in} + \sum \dot{W}_{out} \right)_{sys}}_{\text{نرخ زمانی خالص انرژی افزوده شده به سیستم در اثر انتقال کار}}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} e \rho dV = \left(\dot{Q}_{net, in} + \dot{W}_{net, in} \right)_{sys} \quad (۵۱-۳)$$

که در آن e انرژی ذخیره شده در واحد جرم، $\dot{Q}_{net, in}$ نرخ زمانی خالص انتقال گرما^۴، و $\dot{W}_{net, in}$ نرخ زمانی خالص انتقال کار^۵ است. رابطه‌ی فوق برای سیستم‌های بدون شتاب یا با شتاب، صادق است.

با استفاده از فرضیه‌ی انتقال رینولدز، به بسط رابطه‌ی انرژی برای حجم کنترل می‌پردازیم. برای حجم کنترلی که در هر لحظه با سیستم یکی است (به اثبات رابطه‌ی انتقال رینولدز مراجعه کنید)، مقادیر نرخ زمانی انتقال گرما و کار همان‌هایی هستند که بر حجم کنترل اثر می‌کند. در حجم کنترل مورد بررسی، مقدار متغیر جامع برابر $B = E$ و متغیر متمرکز $b = E/m = e$ است. لذا، رابطه‌ی (۵۱-۳) برای حجم کنترل ثابت و بدون تغییر شکل، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} e \rho dV + \int_{CS} e \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \left(\dot{Q}_{net, in} + \dot{W}_{net, in} \right)_{CV} \quad (۵۲-۳)$$

۱- First law of thermodynamics

۲- Conservation of energy

۳- Total stored energy

۴- Heat transfer

۵- Work transfer

۳-۶-۲ تفسیر رابطه انرژی

حال به بررسی متغیرهای رابطه‌ی (۳-۵۲) خواهیم پرداخت. معمولاً در مقاصد کاربردی، مقدار انرژی ذخیره شده در واحد جرم، e ، از مجموع انرژی داخلی^۱ در واحد جرم، \bar{u} ، انرژی جنبشی^۲ در واحد جرم، $v^2/2$ ، و انرژی پتانسیل^۳ در واحد جرم، gZ ، تشکیل می‌شود. به عبارت دیگر، e به صورت زیر درمی‌آید:

$$e = \bar{u} + \frac{v^2}{2} + gZ \quad (۳-۵۳)$$

نرخ زمانی انتقال گرما، \dot{Q} ، شامل نوعی از انتقال انرژی است که به علت اختلاف گرما بین حجم کنترل و اطراف آن رخ می‌دهد. مثال‌هایی از قبیل پرتوایی^۴، هدایت^۵ و انتقال^۶ فرم‌هایی از انتقال گرما هستند. جهت انتقال گرما، از ناحیه‌ای با درجه حرارت بالا به ناحیه‌ای با درجه حرارت پایین است. بعد از تعادل درجه حرارت، انتقال گرما متوقف می‌شود. چنانچه درجه حرارت در حجم کنترل و اطراف آن یکسان باشد، هیچ‌گونه انتقال گرمایی رخ نمی‌دهد. فرایندی که در آن هیچ انتقال گرمایی صورت نمی‌پذیرد، بی‌دررو^۷ نامیده می‌شود. دو راه وجود دارد که فرایند به صورت بی‌دررو باشد. اول اینکه حجم کنترل عایق‌بندی شده باشد، به طوری که گرما از سطوح آن عبور نکند. دوم اینکه درجه حرارت حجم کنترل و اطراف آن برابر باشد. فرایند بی‌دررو نباید با فرایند هم‌دما^۸ اشتباه شود. دما در فرایند هم‌دما ثابت است، اما در فرایند بی‌دررو ممکن است درجه حرارت داخل حجم کنترل بر اثر انتقال کار تغییر یابد. انتقال گرما مثبت است اگر گرما به داخل حجم کنترل وارد شود، و برعکس آن منفی می‌شود.

نرخ زمانی انتقال کار (توان)، \dot{W} ، شامل نوعی از انتقال انرژی است که مربوط به کار نیرو است. حرکت یک پیستون و یا حرکت محور چرخنده که سطوح کنترل را قطع کنند، مثال‌هایی از انتقال کار هستند. انتقال کار ورودی به حجم کنترل مثبت و خروجی از آن منفی در نظر گرفته می‌شود. فرم‌های متفاوتی از نرخ زمانی انتقال کار وجود دارد که معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{W} = \dot{W}_{shaft} + \dot{W}_{pressure} + \dot{W}_{viscous} + \dot{W}_{other} \quad (۳-۵۴)$$

که در آن \dot{W}_{shaft} توان محور چرخشی، $\dot{W}_{pressure}$ توان نیروی فشاری، $\dot{W}_{viscous}$ توان نیروی برشی، و \dot{W}_{other} توان دیگر نیروها از قبیل الکتریکی، مغناطیسی و کشش سطحی است. در این کتاب از مقدار \dot{W}_{other} به خاطر عدم وجود و یا اثر ضعیف آن صرف نظر می‌کنیم. در بعضی موارد، مثلاً در مواردی که جریان در اطراف یک هم‌زن مورد توجه است، مقدار $\dot{W}_{viscous}$ قابل توجه است، ولی در بقیه‌ی موارد مقدار آن ناچیز است و از آن صرف نظر می‌گردد.

بسیاری از دستگاه‌ها از قبیل پمپ، توربین، هواکش، کمپرسور و غیره، دارای محور چرخشی هستند. در این گونه موارد، انتقال کار از سطوح کنترل، توسط یک محور چرخشی صورت می‌پذیرد. برای

۱- Internal energy ۲- Kinetic energy ۳- Potential energy ۴- Radiation ۵- Conduction
۶- Convection ۷- Adiabatic ۸- Isothermal

محاسبه‌ی توان محوری که با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، مقدار آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{W}_{shaft} = T_{shaft} \omega \quad (55-3)$$

در صورتی که حجم کنترل دارای چند محور باشد، مقدار کل توان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{W}_{net} = \dot{W}_{shaft} - \dot{W}_{shaft} \quad (56-3)$$

توان نیروی ناشی از فشار برای یک المان δA بر روی سطح کنترل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta \dot{W}_{pressure} = \delta \vec{F}_{pressure} \cdot \vec{v} = (-p \hat{n} \delta A) \cdot \vec{v} = -p (\vec{v} \cdot \hat{n}) \delta A \quad (57-3)$$

برای تمام سطوح کنترل، مقدار این توان به صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{W}_{pressure} = - \int_{CS} p (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA \quad (58-3)$$

با توجه به مطالب بالا، رابطه‌ی (۵۴-۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{W} = \dot{W}_{net} - \int_{CS} p (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA \quad (59-3)$$

با ترکیب روابط (۵۲-۳)، (۵۳-۳) و (۵۹-۳) رابطه‌ی کلی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \left(\bar{u} + \frac{v^2}{2} + gZ \right) \rho dV + \int_{CS} \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gZ \right) \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \dot{Q}_{net} + \dot{W}_{shaft} \quad (60-3)$$



رابطه‌ی (۶۰-۳) رابطه‌ی انرژی برای حجم کنترل بدون شتاب و شتاب‌دار است. ک ۳-۷

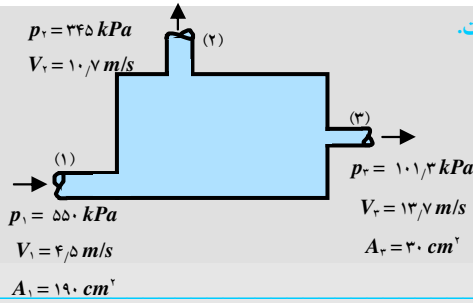
۳-۶-۳ کاربرد رابطه‌ی انرژی

برای جریان پایدار و یا جریان سیکنی پایدار، مقدار عبارت اول رابطه‌ی (۶۰-۳) برابر صفر است. مقدار عبارت دوم در صورت گذر دبی جرمی از سطح کنترل قابل توجه است. چنانچه خصوصیات سیال از قبیل \bar{u} ، p/ρ ، $v^2/2$ و gZ به صورت یکنواخت در سطوح کنترل توزیع شده باشند، در جریان پایدار، رابطه‌ی (۶۰-۳) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{out} \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ \right) \dot{m} + \sum_{in} \left(\bar{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ \right) \dot{m} = \dot{Q}_{net} + \dot{W}_{shaft} \quad (61-3)$$

که در آن V سرعت یکنواخت در مقطع و یا سرعت متوسط \bar{V} است. در مواردی که توان محور چرخشی در نظر گرفته می‌شود، جریان در اطراف محور چرخشی، ناپایدار است. برای مثال، اگرچه سرعت و فشار در یک نقطه در اطراف پره چرخشی یک پمپ در حال تغییر است، ولی در مقاطع بالادست و پایین دست پمپ، جریان پایدار است. باید توجه داشت که در مقاطع بالادست و به خصوص پایین دست پمپ، جریان عملاً به صورت کاملاً یکنواخت برقرار نمی‌باشد، ولی با در نظر گرفتن یکنواخت بودن جریان، جواب‌های قابل قبول حاصل می‌شود. در مورد عدم یکنواختی توزیع سرعت در بخش بعدی صحبت خواهد شد.

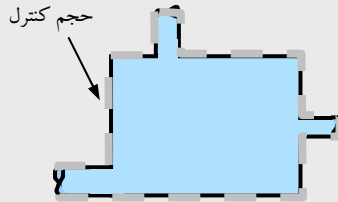
مثال ۳-۱۸: کاربرد رابطی انرژی برای جریان یکنواخت.



سیستم دستگاه نشان داده شده در شکل در یک صفحه افقی قرار دارد. جریان آب در این سیستم بدون اصطکاک و بی‌دررو است. مقدار توان در این سیستم چقدر است؟

پاسخ:

از رابطی (۳-۶۱) برای حجم کنترل نشان داده شده در شکل استفاده می‌شود. با توجه به افقی بودن سیستم، $Z = 0$ است و از انرژی داخلی و کار نیروی برشی صرف نظر می‌گردد. با توجه به مطالب گفته شده، رابطی (۳-۶۱) با فرض سرعت یکنواخت در مقاطع به صورت زیر ساده می‌شود:



$$\dot{W}_{shaft} = \sum_{out} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) - \sum_{in} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right)$$

$$\dot{W}_{shaft} = \dot{m}_3 \left(\frac{p_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} \right) + \dot{m}_2 \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \right) - \dot{m}_1 \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} \right) \quad (1)$$

مقادیر دبی جرمی در مقاطع (۱) و (۳) و از آنجا دبی جرمی در مقطع (۲) با استفاده از رابطی پیوستگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{m}_1 = \rho V_1 A_1 = (999 \text{ kg/m}^3)(4.5 \text{ m/s})(190 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 85.5 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_3 = \rho V_3 A_3 = (999 \text{ kg/m}^3)(13.7 \text{ m/s})(30 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 41.1 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

$$85.5 \text{ kg/s} = \dot{m}_2 + 41.1 \text{ kg/s} \quad ; \quad \dot{m}_2 = 44.4 \text{ kg/s}$$

لذا، رابطی (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{W}_{shaft} = (41.1 \text{ kg/s}) \left[\frac{101300 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3} + \frac{(13.7 \text{ m/s})^2}{2} \right] + (44.4 \text{ kg/s}) \left[\frac{345000 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3} + \frac{(10.7 \text{ m/s})^2}{2} \right] - 85.5 \left[\frac{550000 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3} + \frac{(4.5 \text{ m/s})^2}{2} \right] = \underline{\underline{-22 \text{ kW}}}$$

مقدار منفی توان نشان می‌دهد که از حجم کنترل انرژی گرفته می‌شود.

در بسیاری از مسایل کاربردی علاوه بر پایدار بودن جریان و یکنواخت بودن خصوصیات سیال، فقط یک جریان ورودی و یک جریان خروجی موجود است. به عنوان مثال، انتقال آب از یک مخزن توسط یک لوله را در نظر بگیرید. اگر حجم کنترل شامل مخزن و لوله باشد، سطح مخزن به عنوان سطح کنترل ورودی و مقطع خروجی لوله به عنوان سطح کنترل خروجی در نظر گرفته می‌شود. برای چنین جریانی رابطه‌ی پیوستگی به صورت $\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$ است و رابطه‌ی (۶۱-۳) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\dot{m} \left[\bar{u}_{out} - \bar{u}_{in} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_{out} - \left(\frac{p}{\rho} \right)_{in} + \frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2} + g(Z_{out} - Z_{in}) \right] = \dot{Q}_{net, in} + \dot{W}_{shaft, net, in} \quad (۶۲-۳)$$

$$\underbrace{\left(\frac{p}{\rho} \right)_{in} + \frac{V_{in}^2}{2} + gZ_{in} + \frac{\dot{W}_{shaft, net, in}}{\dot{m}}}_{\text{انرژی مفید}} = \underbrace{\left(\frac{p}{\rho} \right)_{out} + \frac{V_{out}^2}{2} + gZ_{out}}_{\text{انرژی باقیمانده}} + \underbrace{\left(\bar{u}_{out} - \bar{u}_{in} - \frac{\dot{Q}_{net, in}}{\dot{m}} \right)}_{\text{تلفات انرژی}} \quad (۶۳-۳)$$

رابطه‌ی (۶۳-۳) برای سیالات تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر صادق است. برای سیال تراکم‌ناپذیر، رابطه‌ی (۶۳-۳) به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gZ_{in} + \frac{\dot{W}_{shaft, net, in}}{\dot{m}} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gZ_{out} + loss \quad (۶۴-۳)$$

رابطه‌های (۶۳-۳) و (۶۴-۳) رابطه‌های انرژی در واحد جرم^۱ است. فرم‌هایی دیگر از رابطه‌ی انرژی نیز استفاده می‌شود. با ضرب رابطه‌ی (۶۴-۳) در چگالی سیال، ρ ، رابطه‌ی انرژی در واحد حجم^۲ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p_{in} + \frac{\rho V_{in}^2}{2} + \gamma Z_{in} + \frac{\dot{W}_{shaft, net, in}}{Q} = p_{out} + \frac{\rho V_{out}^2}{2} + \gamma Z_{out} + \rho(loss) \quad (۶۵-۳)$$

با تقسیم رابطه (۶۵-۳) بر γ ، رابطه‌ی انرژی در واحد وزن^۳ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{p_{in}}{\gamma} + \frac{V_{in}^2}{2g} + Z_{in} + h_{shaft} = \frac{p_{out}}{\gamma} + \frac{V_{out}^2}{2g} + Z_{out} + h_L \quad (۶۶-۳)$$

که در آن $h_L = loss/g$ و $h_{shaft} = \dot{W}_{shaft} / \gamma Q$ است. چون ابعاد عبارت‌های رابطه‌ی (۶۶-۳) برحسب طول است، این رابطه به نام رابطه‌ی هد انرژی^۴ نیز معروف است. چنانچه یک توربین در حجم کنترل قرار بگیرد، $h_{shaft} = -h_T$ و در صورت وجود پمپ به جای توربین، $h_{shaft} = +h_p$ است. متغیر h_T هد توربین و متغیر h_p هد پمپ است. متغیر h_L تلفات هد انرژی^۵ نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که h_L علاوه بر آنچه که در رابطه‌ی (۶۶-۳) بیان شد، می‌تواند شامل هدی باشد که در اثر اصطکاک از بین می‌رود. معمولاً از

۱- Energy per unit mass ۲- Energy per unit volume ۳- Energy per unit weight ۴- Energy head

۵- Energy head loss

رابطه‌ی هد انرژی، به صورت رابطه‌ی (۳-۶۶) در بسیاری از مقاصد کاربردی به صورت وسیع استفاده می‌شود و فرم‌های دیگر رابطه‌ی انرژی کمتر مورد توجه است. همچنین، در بخش بعدی این فصل به کاربرد ترسیمی رابطه‌ی هد انرژی اشاره خواهد شد.

برای برآورد h_T و h_p از **منحنی مشخصه**^۱ توربین یا پمپ استفاده می‌شود. در منحنی مشخصه، رابطه‌ای بین مقدار دبی و هد پمپ موجود است. برای توضیح بیشتر به فصل ۱۰ این کتاب مراجعه کنید. برای سادگی مطلب، مقادیر h_T و h_p به صورت عددی ثابت و یا رابطه‌ی آن داده می‌شود.

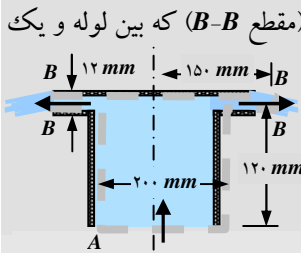
محاسبه‌ی مقدار تلفات هد، h_L ، کاری بس دشوار است و از نظر تئوری فقط برای جریان‌های محدودی قابل محاسبه است. در فصل (۷) با نحوه‌ی محاسبه‌ی آن در لوله‌ها آشنا خواهید شد. در این فصل سعی می‌شود که مقدار تلفات به صورت رابطه‌ای، در صورت مسایل ارایه شود و یا مقدار آن داده شود.



ک ۳-۸

مثال ۳-۱۹: کاربرد رابطه‌ی هد انرژی.

آب در داخل یک لوله‌ی عمودی در جریان است و از فضای انتهای لوله (مقطع B-B) که بین لوله و یک صفحه‌ی مدور محصور است به صورت شعاعی، جت آب خارج می‌شود. اگر مقدار تلفات هد انرژی بین مقاطع A و B برابر $0.2 V_B^2 / 2g$ و فشار مطلق در مقطع A برابر 110 kPa باشد، مقدار دبی جریان در لوله را به دست آورید.



پاسخ:

حجم کنترل انتخابی شامل یک مقطع ورودی و یک مقطع خروجی است. رابطه‌ی (۳-۶۶) برای حجم کنترل نشان داده شده در شکل، با فرض توزیع یکنواخت به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B + h_L$$

با در نظر گرفتن سطح (A-A) به عنوان سطح مبنا و فشار آتمسفر استاندارد برابر با 101300 Pa داریم:

$$\frac{110000 \text{ Pa}}{9810 \text{ N/m}^3} + \frac{V_A^2}{2g} + 0 = \frac{101300 \text{ Pa}}{9810 \text{ N/m}^3} + \frac{V_B^2}{2g} + 0.12 + 0.2 \frac{V_B^2}{2g}$$

$$\frac{1.2V_B^2 - V_A^2}{2g} = 0.767 \quad (1)$$

رابطه‌ی پیوستگی نیز برای همان حجم کنترل به صورت زیر درمی‌آید:

$$Q = V_A A = V_B B$$

$$V_A \left[\frac{\pi}{4} (0.2 \text{ m})^2 \right] = V_B \left[2\pi (0.15 \text{ m}) (0.012 \text{ m}) \right] \quad ; \quad V_A = 0.36 V_B \quad (2)$$

۱- Characteristic curve

با ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲)، سرعت در مقطع B و از آنجا دبی جریان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1.2V_B^2 - (0.36V_B)^2}{2g} = 0.767 \quad ; \quad V_B = 3.75 \text{ m/s}$$

$$Q = V_B A_B = 3.75 [2\pi (0.15 \text{ m})(0.012 \text{ m})] = \underline{\underline{0.042 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

مثال ۳-۲۰، م، ع، ۸۶

دبی آب در لوله‌ای برابر 20 L/s است. در مسیر این لوله شیری قرار دارد که باعث افت فشاری برابر با 2 kPa می‌شود. مقدار توان تلف شده در این شیر بر حسب وات برابر است با (وزن مخصوص آب $\gamma = 10000 \text{ N/m}^3$):

پاسخ:

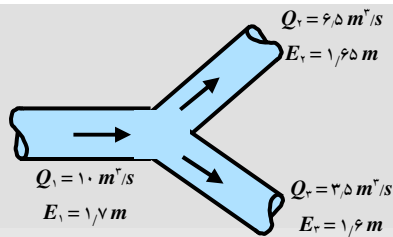
با انتخاب حجم کنترلی که شامل شیر باشد و با توجه به اینکه سرعت جریان قبل و بعد از شیر یکسان (رابطه‌ی پیوستگی) است و شیر افقی است، رابطه‌ی (۳-۶۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{P_{in}}{\gamma} + \frac{V_{in}^2}{2g} + Z_{in} = \frac{P_{out}}{\gamma} + \frac{V_{out}^2}{2g} + Z_{out} + h_L \quad ; \quad \frac{P_{in} - P_{out}}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma} = h_L$$

مقدار توان تلفات هد انرژی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{W}_{loss} = \gamma Q h_L = \gamma Q \frac{\Delta p}{\gamma} = Q \Delta p = (0.02 \text{ m}^3/\text{s})(2000 \text{ Pa}) = \underline{\underline{40 \text{ W}}}$$

مثال ۳-۲۱، م، ک، ۸۱



مشخصات جریان در یک انشعاب سه شاخه‌ی روباز و با کف افقی در شکل زیر ارائه شده است. توان تلف شده در این انشعاب چند وات است ($\gamma = 10^4 \text{ N/m}^3$)؟

پاسخ:

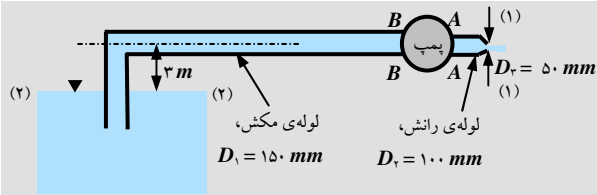
حجم کنترل شامل آب در این سه‌راهی است. اگر نگاه دقیقی به رابطه‌ی (۳-۶۱) بیندازیم، عبارت‌های سمت چپ برابر انرژی ورودی به حجم کنترل، انرژی خروجی و انرژی تلف شده است. عبارات سمت راست نیز بیان‌کننده‌ی انرژی اضافه‌شده و یا تلف شده است. لذا، این رابطه به صورت زیر درمی‌آید:

$$g \left(\sum_{out} E \dot{m} + \sum_{in} E \dot{m} \right) = \dot{W}_{loss} \quad (1)$$

با در نظر گرفتن داده‌های مسأله، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{W}_{loss} = g (E_1 \dot{m}_1 - E_2 \dot{m}_2 - E_3 \dot{m}_3)$$

$$\dot{W}_{loss} = (10 \text{ m/s}^2) \left[\begin{array}{l} (1.7 \text{ m})(10^3 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m}^3/\text{s}) \\ -(1.65 \text{ m})(10^3 \text{ kg/m}^3)(6.5 \text{ m}^3/\text{s}) \\ -(1.6 \text{ m})(10^3 \text{ kg/m}^3)(3.5 \text{ m}^3/\text{s}) \end{array} \right] = \underline{\underline{6750 \text{ W}}}$$



مثال ۳-۲۲: کاربرد رابطه‌ی هد انرژی.

در یک ایستگاه پمپاژ، آب از مخزن توسط پمپ مکیده شده و توسط لوله‌ی رانش به قطر 100 mm که طول آن

بسیار کم است، از روزنه‌ای به قطر 50 mm به آتمسفر رها می‌شود. اگر فشار در در لوله‌ی رانش [مقطع (A-A)] به 36 kPa برسد، خلأزایی در بالادست پمپ در لوله‌ی مکش [مقطع (B-B)] اتفاق می‌افتد. مقدار طول لوله‌ی مکش (L) را با توجه به اینکه مقدار هد تلفات انرژی در لوله‌ی مکش برابر با $(V^2/2g)$ ($0.3L/D_1$) است، به دست آورید. در اینجا $V = V_B$ سرعت یکنواخت در لوله‌ی مکش است.

پاسخ:

طول لوله‌ی رانش کوتاه است و می‌توان از افت هد آن صرف‌نظر کرد. چون جریان پایدار است، و سطح مبنای هم‌تراز سطح آب در مخزن انتخاب می‌شود، رابطه‌ی (۳-۶۶) برای حجم کنترل ثابت که شامل آب بین مقطع (A-A) و مقطع خروجی (۱) است به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 \quad ; \quad \frac{36000 \text{ Pa}}{9810 \text{ N/m}^3} + \frac{V_A^2}{2g} + 3 \text{ m} = 0 + \frac{V_1^2}{2g} + 3 \text{ m}$$

$$V_1^2 - V_A^2 = 72 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad (1)$$

رابطه‌ی پیوستگی برای همان حجم کنترل به صورت زیر است:

$$Q = V_A A_A = V_1 A_1 \quad ; \quad V_1 = \left(\frac{0.10 \text{ m}}{0.05 \text{ m}} \right)^2 V_A = 4V_A \quad (2)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(4V_A)^2 - V_A^2 = 72 \quad ; \quad V_A = 2.19 \text{ m/s}$$

رابطه‌ی پیوستگی برای حجم کنترل بین مقاطع (A-A) و (B-B) به صورت زیر درمی‌آید:

$$Q = V_A A_A = V_B A_B \quad ; \quad V_B = \left(\frac{0.10 \text{ m}}{0.15 \text{ m}} \right)^2 2.19 = 0.97 \text{ m/s}$$

توجه داشته باشید که در مقطع (B-B) به علت وقوع خلأزایی، فشار آب برابر فشار بخار آب است. طبق جدول (پ-۳)، فشار بخار مطلق آب در شرایط استاندارد ($15/6^\circ \text{C}$) برابر 1770 Pa است. حال رابطه‌ی

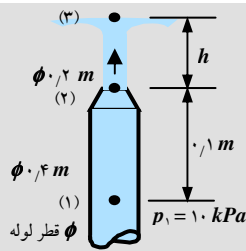
هد انرژی برای حجم کنترل بین مقطع (B-B) و سطح مخزن، مقطع (۲)، به صورت زیر به کار برده می شود:

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B + h_L$$

$$0 + 0 + 0 = \frac{(1770 - 101300) \text{ Pa}}{9810 \text{ N/m}^3} + \frac{(0.97 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + (3 \text{ m}) + 0.03 \frac{L}{(0.15 \text{ m})} \frac{(0.97 \text{ m/s})}{2(9.81 \text{ m/s}^3)}$$

$$\underline{L = 740 \text{ m}}$$

که در آن فشار در مقطع (B-B) به صورت فشار نسبی بیان شده است. باید در نظر داشت که پدیده‌ی خلا‌زایی به هیچ وجه مطلوب نیست و ممکن است خساراتی به تأسیسات پمپ و لوله وارد کند. اگر طول لوله‌ی مکش کمتر انتخاب شود، فشار در مقطع (B-B) بیش از فشار بخار آب می شود و پدیده‌ی خلا‌زایی رخ نمی دهد.

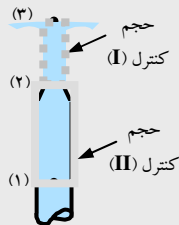


مثال ۳-۲۳، م.م، ۸۶

سیال با خصوصیات فیزیکی زیر از یک نازل خارج می شود. این سیال پس از خروج از سر نازل تا ارتفاع h بالا می رود. این ارتفاع چقدر است؟ فشار درون لوله را در مقطع (۱) 10 kPa اندازه گرفتیم و از تأثیرات لزجت صرف نظر می کنیم ($\rho = 10000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$):

پاسخ:

در این مسأله از افت اصطکاک صرف نظر شده و سرعت در مقاطع جریان یکنواخت فرض شده است. با انتخاب حجم کنترل که بین مقطع (۲) و مقطع (۳) باشد [حجم کنترل (I)]، رابطه‌ی هد انرژی (۳-۶۶) با توجه به انتخاب سطح مبنا در مقطع (۲) به صورت زیر درمی آید:



$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3 \quad ; \quad 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0 = 0 + 0 + h$$

$$h = \frac{V_2^2}{2g} \quad (1)$$

همچنین، رابطه‌ی هد انرژی برای حجم کنترل بین مقاطع (۱) و (۲) [حجم کنترل (II)]، با در نظر گرفتن سطح مبنا در مقطع (۱) به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

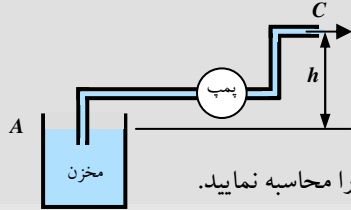
$$\frac{10000 \text{ Pa}}{10000 \text{ N/m}^3} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + (0.1 \text{ m}) \quad (2)$$

رابطه‌ی پیوستگی برای همان حجم کنترل به صورت زیر ساده می شود:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad ; \quad V_1 = \left(\frac{0.2m}{0.4m} \right)^2 V_2 = \frac{1}{4} V_2 \quad (۳)$$

با ترکیب رابطه‌های (۲) و (۳) و از آنجا با استفاده از رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$(1m) + \frac{1}{16} \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} + (0.1m) \quad ; \quad \frac{15}{16} \frac{V_2^2}{2g} = \frac{15}{16} h = 0.9m \quad ; \quad \underline{\underline{h = 0.96 \text{ m}}}$$



مثال ۳-۲۴، مش، ۸۵

پمپی آب را از مخزن A به خروجی C منتقل می‌نماید. اگر اصطکاک مسیر برابر $h_f = 2V_C^2 / 2g$ ، قدرت پمپ $nW_p = 5V_C^2 / 2g$ و سرعت خروجی $V_C = 4 \text{ m/s}$ باشد، ارتفاع h را محاسبه نمایید.

پاسخ:

مقدار nW_p توان مفید پمپ در واحد دبی جرمی است که به جریان داده می‌شود. با انتخاب سطح آب مخزن به عنوان سطح مبنا، رابطه‌ی (۳-۶۴) برای حجم کنترل که شامل آب بین مقطع سطح آب مخزن (A) و مقطع خروجی لوله (C) است به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{V_{in}^2}{2} + gZ_{in} + \frac{W_{shaft \text{ net in}}}{\dot{m}} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{V_{out}^2}{2} + gZ_{out} + loss$$

$$0 + 0 + 0 + \frac{5V_C^2}{2gC} = 0 + \frac{V_C^2}{2gC} + h + \frac{2V_C^2}{2gC}$$

$$\frac{5(4\text{m/s})^2}{2(9.81\text{m/s}^2)} = 0 + \frac{(4\text{m/s})^2}{2(9.81\text{m/s}^2)} + h + \frac{2(4\text{m/s})^2}{2} \quad ; \quad \underline{\underline{h = 1.63 \text{ m}}}$$

مسائل ۳-۷۴
الی ۳-۸۹

۳-۶-۴ ضریب تصحیح انرژی

در رابطه‌ی انرژی [رابطه‌ی (۳-۶۱)]، توزیع یکنواخت برای خصوصیات جریان در سطوح کنترل و از آن جمله برای سرعت در نظر گرفته شده است. اما، در بسیاری از موارد، سیال با مرز سخت در تماس است. لذا، سرعت سیال در تماس با مرز سخت بنابر اصل نلغزیدن برابر صفر است و در بقیه‌ی نقاط، سرعت صفر نیست. برای مثال، سرعت سیال روی جدار داخلی لوله صفر و روی محور آن حداکثر مقدار را دارا می‌باشد. بنابراین، فرض توزیع یکنواخت سرعت در بسیاری از موارد خلاف واقعیت است. دانشمندی به نام **جسپرد کوریولیس**^۱ نشان داد که انرژی جنبشی سیال که با فرض توزیع یکنواخت سرعت و با فرض توزیع واقعی سرعت محاسبه شوند، یکسان نمی‌باشند.

۱- Jaspers Coriolis

برای جبران این اثر از ضریبی به نام **ضریب تصحیح انرژی جنبشی**، α ، که از تقسیم انرژی جنبشی واقعی به انرژی جنبشی به ازای سرعت متوسط جریان به دست می آید، استفاده می شود. جمله ی انرژی جنبشی در رابطه ی (۳-۶۰) به صورت زیر تصحیح می شود:

$$\int_{CS} \frac{v}{2} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA = \sum_{CS} \alpha \frac{\bar{V}}{2} \dot{m} \quad (۳-۶۷)$$

مقدار ضریب α به توزیع سرعت جریان در مقطع بستگی دارد و می تواند برای هر سطح کنترل متفاوت باشد. واضح است که برای جریان یکنواخت، $\alpha = 1$ است. با توجه به رابطه ی (۳-۶۷) ضریب α برای هر سطح کنترل از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\alpha = \frac{\int (v^2/2) \rho (\vec{v} \cdot \hat{n}) dA}{\dot{m} \bar{V}^2/2} \quad (۳-۶۸)$$

بنابراین در رابطه های (۳-۶۴) الی (۳-۶۶) اعمال ضریب α به عبارت انرژی جنبشی، امری الزامی است. برای مثال، رابطه ی هد انرژی (۳-۶۶)، به صورت زیر تصحیح می گردد:

$$\frac{P_{in}}{\gamma} + \alpha_{in} \frac{\bar{V}_{in}^2}{2g} + Z_{in} + h_{shaft} = \frac{P_{out}}{\gamma} + \alpha_{out} \frac{\bar{V}_{out}^2}{2g} + Z_{out} + h_L \quad (۳-۶۹)$$

برای سیال تراکم ناپذیر، در صورتی که بردار یکه ی سطح هم راستای بردار سرعت باشد، رابطه ی (۳-۶۸) به صورت زیر ساده می شود:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\bar{V}} \right)^3 dA \quad (۳-۷۰)$$

معرفی یک دانشمند

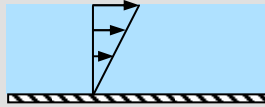
جسپر د-گوستاو-د-کوریولیس (۱۷۹۲-۱۸۴۳)



این دانشمند در شهر پاریس در کشور فرانسه به دنیا آمد. او یک ریاضی دان و مهندس مکانیک بود. شهرت وی به خاطر معرفی اثر کوریولیس است که مربوط به تبادل انرژی گردش سیال در یک دستگاه است. در اوایل قرن بیستم بود که دانشمندان دریافتند که اثر کوریولیس در ارتباط با گردش زمین نیز مطرح است. وی در سال ۱۸۱۶ در دانشگاه پلی تکنیک پاریس مشغول به کار شد و بسیاری از کارهای آزمایشگاهی را در این دانشگاه انجام داد. در سال ۱۸۲۹ کتابی در زمینه ی مکانیک به چاپ رساند که در آن کاربرد مکانیک در صنعت توصیف شده است. در این دوره بود که وی به تصحیح عبارت انرژی جنبشی پرداخت.

برای محاسبه‌ی مقدار ضریب تصحیح انرژی جنبشی، توزیع سرعت در مقطع جریان باید معلوم باشد. لازم به ذکر است که اگر توزیع سرعت معلوم باشد، دیگر نیازی به محاسبه‌ی ضریب α نیست، چون عبارت انتگرالی رابطه‌ی (۳-۶۸) قابل محاسبه است. درحقیقت، مقادیر این ضریب برای تعدادی از مسایل خاص که در آنها توزیع سرعت در مقطع جریان یا سطح کنترل معلوم است، مشخص می‌باشد. به یاد داشته باشید که ضریب α برای هر نوع توزیع سرعت (به جز توزیع یکنواخت) بزرگ‌تر از یک است. در صورتی که توزیع سرعت یکنواخت باشد، $\alpha = \beta = 1$ است.

مثال ۳-۲۵، م، ع، ۸۶



با توجه به توزیع فرضی سرعت خطی در یک کانال باز که در شکل نشان داده شده است، مقدار ضریب تصحیح انرژی جنبشی (α) برابر است با:

پاسخ:

اگر v سرعت جریان در ارتفاع y از کف، d عمق آب و V_{max} مقدار حداکثر سرعت (در سطح آزاد) باشد، مقادیر سرعت متوسط، رابطه‌ی توزیع سرعت و سپس α از رابطه‌ی (۳-۷۰) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{V} = \frac{V_{max}}{2} \quad \& \quad v = V_{max} \frac{y}{d}$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\bar{V}} \right)^3 dA = \frac{1}{d} \int_0^d \left(\frac{V_{max} y/d}{V_{max}/2} \right)^3 dy = \frac{1}{d} \int_0^d \left(\frac{2y}{d} \right)^3 dy = \frac{1}{d} \left[\frac{y^4}{2d^3} \right]_0^d = \frac{2}{3}$$

مسایل ۳-۹۰
الی ۳-۹۴

۳-۷ خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی

همان‌طوری که در بخش (۳-۶) گفته شد، رابطه‌ی (۳-۶۶) رابطه‌ی انرژی در واحد وزن (رابطه‌ی هد انرژی) برای جریان پایدار، تراکم‌ناپذیر و با خصوصیات یکنواخت است. چون بعد عبارت‌های این رابطه بعد طول است، هر کدام از ترم‌های رابطه را می‌توان به صورت ترسیمی و با بعد ارتفاع نشان داد. این کار توسط مفاهیمی از قبیل خط شیب انرژی^۱ (EGL) و خط شیب هیدرولیکی^۲ (HGL) صورت می‌پذیرد.

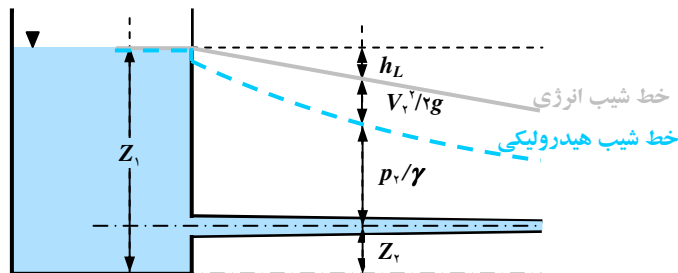
در رابطه‌ی (۳-۶۶)، عبارت Z ، معرف انرژی پتانسیل ناشی از ارتفاع از مبنا در نظر گرفته شده و هد ارتفاع^۳ نامیده می‌شود. عبارت فشار، p/γ ، هد فشار^۴ نامیده می‌شود و معرف ارتفاع ستونی از سیال است که برای ایجاد این فشار لازم است. عبارت سرعت $V^2/2g$ ، معرف ارتفاع لازم برای سقوط آزاد سیال است تا بتواند سرعتش از صفر به V برسد. این عبارت هد سرعت^۵ نامیده می‌شود. هد محور چرخشی، h_{shaft} ، مربوط به هد دستگاه‌هایی از قبیل پمپ و توربین است. همان‌طوری که قبلاً بیان شد، هد پمپ h_p ، باعث افزایش و هد توربین h_T ، باعث کاهش هد سیستم می‌شود. هد تلفات انرژی، h_L ، مبین مقدار هدی است که در اثر عواملی از قبیل اصطکاک از بین می‌رود.

۱- Energy grade line ۲- Hydraulic grade line ۳- Elevation head ۴- Pressure head ۵- Velocity head

خط شیب انرژی (EGL) نشان‌دهنده تغییرات هد انرژی کل و یا ارتفاع معادل انرژی در کلیه مقاطع است. در شکل (۷-۳)، لوله‌ای شیب‌دار با مقطع متغیر به مخزنی متصل است. اگر سطح مینا، کف مخزن اختیار شود، در سطح مقطع (۱) که سطح مخزن است، هد ارتفاع با Z_1 نشان داده شده است. هد ارتفاع مقداری متغیر، بسته به انتخاب سطح مینا است. چون سرعت متوسط جریان در مقطع (۱) بسیار کم است، مقدار هد سرعت $V_1^2/2g$ ناچیز است. هد فشار به علت اینکه فشار سطح مخزن برابر فشار آتمسفر است، برابر صفر است. لذا، هد انرژی کل در سطح مقطع (۱) برابر هد ارتفاع است و سطح مخزن، نقاط خط شیب انرژی است. در مقطع (۲) که در لوله قرار دارد، مقادیر هد ارتفاع، هد فشار و هد سرعت نشان داده شده است. مقدار هد فشار با وصل کردن یک مانومتر به نقطه‌ای از مقطع (با فرض یکنواخت بودن مقدار فشار در مقطع) به دست می‌آید. برای هد سرعت از وسیله‌ای به نام **لوله پیتوت**^۱ استفاده می‌شود که در فصل ۵ به آن پرداخته می‌شود. اگر مقدار دبی نیز معلوم باشد، مقدار سرعت متوسط و در نتیجه هد سرعت قابل محاسبه است. بین مقطع (۱) و مقطع (۲) مقداری انرژی نیز تلف می‌شود که در شکل (۷-۳) با h_L نشان داده شده است.

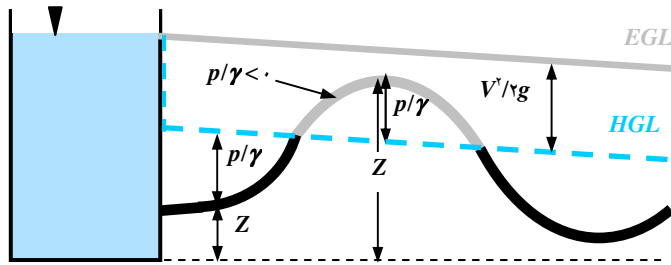
اگر مقادیر هد ارتفاع و هد فشار در هر مقطع مشخص باشد، نقطه‌ای از خط شیب هیدرولیکی (HGL) در آن مقطع به دست می‌آید. در سطح مخزن، خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی برهم منطبق است. در مقطع (۲)، ارتفاع خط شیب هیدرولیکی به اندازه‌ی هد سرعت از خط شیب انرژی کمتر است. خط شیب هیدرولیکی در این مثال به علت متغیر بودن سطح مقطع لوله به صورت یک منحنی است. در صورتی که قطر لوله ثابت باشد، فاصله‌ی خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی ثابت است.

چنانچه در ناحیه‌ای از مسیر جریان، محور لوله پایین‌تر از خط شیب هیدرولیکی قرار بگیرد [شکل (۸-۳)]، فشار در این ناحیه‌ی لوله، مثبت است. در غیر این صورت، فشار منفی است. در این مثال، چون قطر لوله و در نتیجه هد سرعت، ثابت است، فاصله‌ی خط شیب هیدرولیکی و خط شیب انرژی، ثابت است. در این شکل، طولی از لوله که دارای فشار منفی است با زمینه‌ی خاکستری نشان داده شده است. چون اغلب لوله‌های آبرسانی در زیر سطح زمین قرار می‌گیرند، فشار خاک روی لوله و فشار منفی حاصله در لوله



شکل ۷-۳ شمایی از موقعیت خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی.

۱- Pitot tube

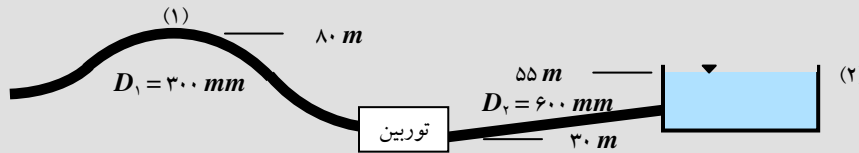


شکل ۳-۸ استفاده از خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی برای ارزیابی فشار در خط لوله.

به‌خاطر آنچه در اینجا بیان شد، می‌تواند اثرات زیانباری به‌همراه داشته باشد. ضمناً، اگر فشار منفی به فشار بخار آب برسد، خلأزایی آغاز شده و در درازمدت باعث خرابی لوله می‌گردد. ترسیم خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی می‌تواند راهنمای خوبی در ارزیابی طراحی یک خط لوله باشد. با توجه به آنچه گفته شد، لازم است که لوله، زیر خط شیب هیدرولیکی خوابانده شود تا فشار منفی در آن ایجاد نشود.

مثال ۳-۲۶: رسم خطوط شیب انرژی و شیب هیدرولیکی.

در شکل زیر، هد مصرفی توسط توربین برابر 68 m و فشار در خط لوله در مقطع (۱) برابر 450 kPa است. مقدار تلفات انرژی بین مقطع (۱) و توربین برابر $3\bar{V}_1^2/2g$ و بین توربین و مخزن برابر $3\bar{V}_2^2/2g$ است که \bar{V}_1 و \bar{V}_2 به ترتیب سرعت متوسط جریان در لوله‌ها به قطر 300 mm و 600 mm است. تراز مخزن، تراز اتصال لوله به توربین و تراز مقطع (۱) در شکل نشان داده شده است. مقدار دبی جریان را محاسبه کرده و خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی را بین مقاطع (۱) و (۲) (مخزن) رسم کنید.



پاسخ:

چون جریان پایدار است، رابطه‌ی (۳-۶۹) برای حجم کنترل بین مقاطع (۱) و (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + Z_1 - h_T = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + Z_2 + h_L$$

$$\frac{450000\text{ Pa}}{9810\text{ N/m}^3} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + 80 - 68 = 0 + 0 + 55 + 3\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + 3\frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

$$2\bar{V}_1^2 + 3\bar{V}_2^2 = 56.34 \quad (1)$$

که در آن $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ در نظر گرفته شده است. رابطه‌ی پیوستگی برای همان حجم کنترل نیز به‌صورت زیر است:

$$Q = \bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2 \quad ; \quad \bar{V}_1 = \left(\frac{0.6}{0.3}\right)^2 \bar{V}_2 = 4\bar{V}_2 \quad (2)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) مقدار سرعت و از آنجا دبی جریان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2(4\bar{V}_2)^2 + 3\bar{V}_2^2 = 56.34 \quad ; \quad \bar{V}_2 = 1.27 \text{ m/s}$$

$$\bar{V}_1 = 4(1.27 \text{ m/s}) = 5.08 \text{ m/s}$$

$$Q = \bar{V}_1 A_1 = (5.08 \text{ m/s}) \left[\frac{\pi}{4} (0.3 \text{ m})^2 \right] = \underline{\underline{0.360 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

حال می‌توان مقادیر هد انرژی را در هر مقطع حساب کرد. لازم به یادآوری است که هد خط شیب هیدرولیکی در هر مقطع به اندازه‌ی هد سرعت از هد انرژی کمتر است. ابتدا هد انرژی جنبشی در لوله‌ها محاسبه می‌شود و سپس ارتفاع خط انرژی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\bar{V}_1^2}{2g} = \frac{(5.08 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 1.32 \text{ m} \quad ; \quad \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = \frac{(1.27 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.08 \text{ m}$$

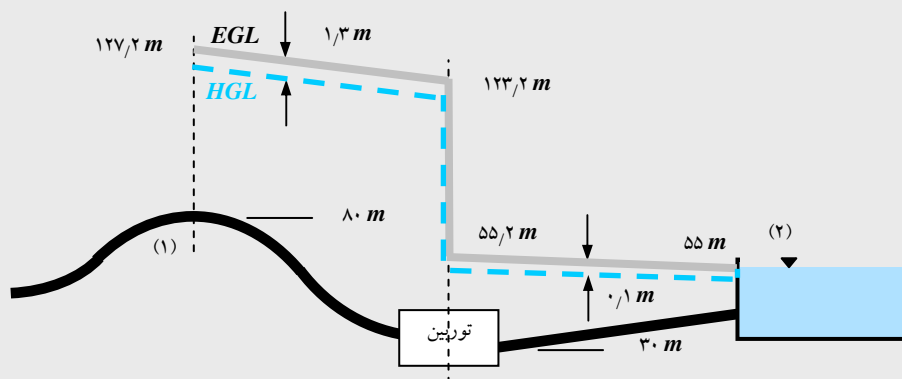
$$\text{At (1): } EGL = \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{450000 \text{ Pa}}{9810 \text{ N/m}^3} + (1.32 \text{ m}) + (80 \text{ m}) = 127.19 \text{ m}$$

$$\text{At Turbine : Upstream } EGL_1 = 127.19 \text{ m} - 3(1.32 \text{ m}) = 123.23 \text{ m}$$

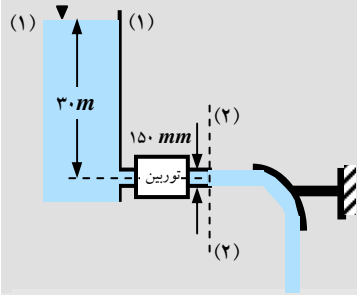
$$\text{Downstream } EGL_2 = 123.23 \text{ m} - 68 = 55.23 \text{ m}$$

$$\text{At (2): } EGL_1 = 55.23 \text{ m} - 2(0.08 \text{ m}) = 55.07 \text{ m}$$

در مقطع توربین، دو مقدار برای هد انرژی وجود دارد که یکی مربوط به قبل از توربین و دیگری مربوط به بعد از توربین است. البته هد مقطع (۲) باید ۵۵ m باشد که به اندازه‌ی ۰/۰۷ m خطا در محاسبه به علت گرد کردن اعداد وجود دارد. در شکل زیر خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی ترسیم شده است. خط شیب هیدرولیکی در لوله‌ی (۱) به اندازه‌ی ۱/۳ m و در لوله‌ی (۲) به اندازه‌ی ۰/۱ m پائین تر از خط انرژی است.



مثال ۳-۲۷: ترکیب رابطهی انرژی و رابطهی اندازه حرکت خطی.



آب از یک مخزن وارد توربین می‌گردد و توسط لوله‌ای کوتاه به فضای آزاد جریان می‌یابد. سپس، جریان آب به منحرف‌کننده‌ی جریان با زاویه‌ی 90° برخورد می‌کند. اگر عکس‌العمل ناشی از برخورد آب به منحرف‌کننده 500 N باشد، مقدار توان توربین چقدر است؟ از افت انرژی صرف‌نظر کنید.

پاسخ:

رابطه‌ی انرژی برای حجم کنترل شامل آب از سطح مخزن تا خروجی لوله به کار می‌رود. از افت هد لوله به‌خاطر کوتاه بودن آن صرف‌نظر شده است و لذا رابطه‌ی (۳-۶۹) با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + Z_1 - h_T = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + Z_2$$

$$0 + 0 + 30 - h_T = 0 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + 0 \quad ; \quad h_T = 30 - \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \quad (1)$$

برای محاسبه‌ی سرعت متوسط در خروجی لوله، از رابطه‌ی اندازه حرکت خطی [رابطه‌ی (۳-۳۸)] برای جریان پایدار و یکنواخت که در راستای محور لوله نوشته می‌شود استفاده می‌گردد. حجم کنترل، شامل جریان آب از خروجی لوله تا برخورد به صفحه است. مشابه مثال (۳-۷) خواهیم داشت:

$$R_x = \rho Q \bar{V}_2 = \rho \bar{V}_2^2 A \quad ; \quad 500\text{ N} = (1000\text{ kg/m}^3) \bar{V}_2^2 \left[\frac{\pi}{4} (0.15\text{ m})^2 \right]$$

$$\bar{V}_2 = 5.32\text{ m/s} \quad (2)$$

با قراردادن مقدار \bar{V}_2 از رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱)، h_T و از آنجا توان توربین به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$h_T = 30 - \frac{(5.32\text{ m/s})^2}{2(9.81\text{ m/s}^2)} = (30 - 1.42)\text{ m} = 28.6\text{ m}$$

$$\dot{W}_T = \gamma Q h_T = (9810\text{ N/m}^3) \left[\frac{\pi}{4} (0.15\text{ m})^2 (5.32\text{ m/s}) \right] (28.6\text{ m}) = \underline{\underline{26377\text{ W}}}$$